Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2023-2024
ANALYSE 3

Feuille de TD n°8

Fonctions : dérivabilité.

Exercice 4

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant (x-y)^2.$$

<u>Correction</u>.

Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions satisfaisant la condition de l'énoncé.
($\subset$) Soit $f \in \mathcal{F}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \neq x_0$ on a $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \leqslant |x - x_0|$. Par passage à la limite $x \to x_0$ dans l'inégalité précédente, on obtient que f est dérivable en x_0 de dérivée nulle. C'est vrai pour tout x_0, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée nulle. Par conséquent, f est constante.
($\supset$) Réciproquement, une fonction constante vérifie l'inégalité de l'énoncé.
Donc $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fonctions constantes.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ pour tout $x \geqslant 0$ et $f(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{-x})$ pour tout $x < 0$.

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
3. Montrer que f est dérivable à droite et à gauche en 0. Puis dérivable en 0.
4. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

<u>Correction</u>.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-^*$ par composée de fonctions continues. f admet comme limite $1 = f(0)$ à droite en 0 et $1 = f(0)$ à gauche en 0, donc f est continue en 0. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ par composées de fonctions dérivables.
3. Soit $x > 0$ alors $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\cos(\sqrt{x})-1}{x} = \frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2 + \underset{x\to 0}{o}(x)}{x}$. Donc f est dérivable à droite en 0 de dérivée $-\frac{1}{2}$.
Soit $x < 0$ alors $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{-x})-1}{x} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{-x})^2 + \underset{x\to 0}{o}(x)}{x} = -\frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1)$. Donc f est dérivable à gauche en 0 de dérivée $-\frac{1}{2}$. Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
4. On a pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x})$, donc f' a pour limite à droite $-\frac{1}{2} = f'(0)$. On a pour tout $x < 0$, $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{-x}} \operatorname{sh}(\sqrt{-x})$, donc f' a pour limite à gauche $-\frac{1}{2} = f'(0)$ car $\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. Par conséquent f' est continue en 0. Comme f' est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, finalement f' est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$. Et donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction dérivable sur $]a, b]$ et telle que f' admet une limite (à droite) en a.

1. Montrer que f' est bornée sur un voisinage de a dans $]a, b]$.
2. En déduire que f est λ-lipschitzienne sur un voisinage de a dans $]a, b]$, pour un certain $\lambda > 0$.
3. Montrer que f est uniformément continue sur $]a, b]$.
4. ($\star$) En déduire que f est prolongeable par continuité en a. On notera $\tilde{f}$ le prolongement.
5. ($\star$) Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable (à droite) en a, puis de dérivée continue en a.

Nous avons montré que f est prolongeable en a en une fonction dérivable sur $[a, b]$ et à dérivée continue en a. C'est le théorème de la limite de la dérivée.

Correction.

1. C'est un résultat vu en cours : une fonction qui admet une limite finie en un point, y est localement bornée. Redémontrons le résultat.

   Notons ℓ' la limite de f' (à droite) en a. Soit $\varepsilon = 1$, alors par définition de la limite, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap]a,b]$, $|f'(x) - \ell'| < 1$, donc $|f'(x)| \leqslant |\ell'| + 1$ (par l'inégalité triangulaire inverse). On déduit donc que f' est bornée par $\lambda = |\ell'| + 1$ sur $]a-\eta, a+\eta[\cap]a,b]$.

2. Reprenons le η défini à la précédente question. Soit $x, x' \in]a-\eta, a+\eta[\cap]a,b]$, avec pour fixer les idées $x < x'$. Alors la fonction f est dérivable sur $[x, x']$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, x'[$ tel que $f(x') - f(x) = f'(c)(x' - x)$. On déduit alors que $|f(x') - f(x)| \leqslant \lambda |x' - x|$, i.e. f est λ-lipschitzienne sur $]a-\eta, a+\eta[\cap]a,b]$.

3. D'après la question précédente, comme f est λ-lipschitzienne sur $]a-\eta, a+\eta[\cap]a,b]$, alors f est uniformément continue sur $]a-\eta, a+\eta[\cap]a,b]$. Si $a+\eta \geqslant b$, alors $]a-\eta, a+\eta[\cap]a,b] =]a,b]$. Sinon $]a-\eta, a+\eta[\cap]a,b] =]a, a+\eta[\subset]a,b]$. Or comme f est continue sur $[a+\eta, b]$ (car dérivable sur $]a,b]$, f est uniformément continue sur $[a+\eta, b]$ par le théorème de Heine. Ainsi f est UC sur $]a,b]$.

4. Le raisonnement a déjà été fait dans le TD7. Nous le reprenons tout de même ici.

   Montrons que f admet une limite en a en utilisant le critère séquentiel de la limite. Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite de $]a,b]$ qui converge vers a. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \in]a-\eta, a+\eta[\cap]a,b]$. Ainsi pour tout $p, q \geqslant N$, $|f(u_p) - f(u_q)| \leqslant \lambda |u_p - u_q|$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors comme u converge, c'est une suite de Cauchy. Ainsi il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geqslant N'$, $|u_p - u_q| < \frac{\varepsilon}{\lambda}$. Ainsi pour tout $p, q \geqslant \max(N, N')$, on a $|f(u_p) - f(u_q)| < \varepsilon$. Par conséquent, la suite $(f(u_n))_{n\in N}$ est de Cauchy et donc converge vers $\ell_u \in \mathbb{R}$.

   Montrons que la limite ℓ_u ne dépend pas de u. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite de $]a,b]$ qui converge vers a. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|f(u_n) - f(v_n)| \leqslant \lambda |u_n - v_n|$, et par passage à la limite dans l'inégalité on obtient que $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ_u. Notons donc ℓ cette limite.

   On a montré que pour toute suite u de $]a,b]$ convergeant vers a, on a $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Ainsi f admet $\ell \in \mathbb{R}$ comme limite en a. Donc f est prolongeable par continuité en ℓ et le prolongement par continuité est la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(a) = \ell$ et $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a,b]$. On sait que $\tilde{f}$ est continue en a. Et comme f est dérivable sur $]a,b]$, c'est aussi le cas de $\tilde{f}$.

5. Considérons le taux d'accroissement $\tau_{a,\tilde{f}} : x \in]a,b] \mapsto \frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(a)}{x-a}$. Montrons qu'il admet comme limite ℓ' en a. Soit $\varepsilon > 0$, comme f' admet comme limite ℓ' en a, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap]a,b]$, $|f'(x) - \ell'| < \varepsilon$. Soit $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap]a,b]$, alors $\tilde{f}$ est continue sur $[a,x]$ et dérivable sur $]a,x]$ donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]a,x[$ tel que $\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a) = \tilde{f}'(c_x)(x-a)$, d'où $\tau_{a,\tilde{f}}(x) = \tilde{f}'(c_x) = f'(c_x)$. Or $c_x \in]a-\eta, a+\eta[\cap]a,b]$, donc $|f'(c_x) - \ell'| < \varepsilon$, d'où $|\tau_{a,\tilde{f}}(x) - \ell'| < \varepsilon$. On a bien montré que $\lim\limits_{x\to a} \tau_{a,\tilde{f}}(x) = \ell'$. Donc $\tilde{f}$ est dérivable en a et $\tilde{f}'(a) = \ell'$.

   On sait donc que pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap]a,b]$, $|\tilde{f}'(x) - \tilde{f}'(a)| < \varepsilon$, puisque $\tilde{f}'(x) = f'(x)$ et $\tilde{f}'(a) = \ell'$. Cette inégalité étant encore vraie pour $x = a$, on a donc bien montré que $\tilde{f}'$ est continue en a.

Exercice 7

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction N fois dérivable sur $[a,b]$ et qui s'annule en $N+1$ points, avec $N \geqslant 1$. Montrer que $f^{(N)}$ s'annule au moins une fois.

Correction.
Montrons par récurrence sur $n \in \{0, \ldots, N\}$ que $f^{(n)}$ admet au moins $N+1-n$ zéros sur $[a,b]$. Pour l'initialisation, le résultat est vrai par hypothèse pour $f^{(0)} = f$. Supposons la propriété vraie au rang $n \in \{0, \ldots, N-1\}$. Notons $a \leqslant x_{n,1} < x_{n,2} < \ldots < x_{n,N+1-n} \leqslant b$ les $N+1-n$ zéros de $f^{(n)}$. Soit $k \in \{1, \ldots, N-n\}$. Alors par hypothèse, $f^{(n)}$ est dérivable sur $[x_{n,k}, x_{n,k+1}]$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $x_{n+1,k} \in]x_{n,k}, x_{n,k+1}[$ tel que $f'(x_{n+1,k}) = 0$. Ceci termine la récurrence. En particulier, $f^{(N)}$ s'annule au moins une fois.

Exercice 8

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

Correction.
Méthode directe : Si f est nulle, alors f' l'est également. Sinon, il existe $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Supposons que $f(x_0) > 0$ (on raisonne de même si $f(x_0) < 0$). Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, il existe $B > x_0$ tel que $f(B) < \frac{1}{2} f(x_0)$.

- Si $f(B) \leqslant 0$ alors puisque f est continue sur $[x_0, B]$, il existe, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $x_1 \in [x_0, B]$ tel que $f(x_1) = 0$. Ainsi, puisque $f(0) = f(x_1)$ et f est dérivable, il existe d'après le théorème de Rolle, $c \in [0, x_1]$ tel que $f'(c) = 0$.
- Si $f(B) > 0$ alors puisque f est continue sur $[0, x_0]$, il existe, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $x_2 \in [0, x_0]$ tel que $f(x_2) = f(B)$. Ainsi, puisque $f(x_2) = f(B)$ et f est dérivable, il existe d'après le théorème de Rolle, $c \in [x_2, B]$ tel que $f'(c) = 0$.

Méthode par l'absurde : Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) \neq 0$. Alors nécessairemnt $f' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $f' < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, car sinon il existerait $0 < x < x'$ tels que $0 \in]f'(x), f'(x')[$ (si $f'(x) < f'(x')$, sinon c'est l'inverse) et par continuité de f' sur $\mathbb{R}_+$, il existerait par le TVI $t \in]x, x'[\subset \mathbb{R}_+^*$ tel que $f'(t) = 0$.

Supposons par exemple $f' > 0$. Alors f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On a donc $f(2) > f(1) > 0$. Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, il existe $x_0 > 2$ tel que $f(x_0) < f(1)$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_1 \in]2, x_0[$ tel que $f(x_1) = f(1)$. Par dérivabilité de f sur $[1, x_1]$ et $f(1) = f(x_1)$, on déduit grâce au théorème de Rolle qu'il existe $c \in]1, x_1[$ tel que $f'(c) = 0$. Absurde. Donc f' s'annule bien sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 9

Appliquer le théorème des accroissements finis à $f : x \in]1, +\infty[\mapsto \ln(\ln(x))$ sur $[k, k+1]$ pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et en déduire que $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$ et que $\sum_{k \geqslant 2} \frac{1}{k \ln(k)}$ est divergente.

Correction.
Pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, la fonction f est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$, donc par le théorème des accroissements finis, il existe $c_k \in]k, k+1[$ tel que $\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) = \frac{1}{c_k \ln(c_k)}$. De plus par décroissance de $x \in]1, +\infty[\mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$, on a pour tout $k \geqslant 2$ $\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \frac{1}{c_k \ln(c_k)} \leqslant \frac{1}{k \ln(k)}$. On déduit en sommant que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \sum_{k=2}^{n} (\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k))) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)}, \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)} - \frac{1}{2\ln(2)} + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)}, \end{aligned}$$

d'où

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)} \leqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

En divisant par $\ln(\ln(n+1))$ et en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient alors

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(\ln(n+1)) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

Pour justifier l'équivalent $\ln(\ln(n+1)) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$, on remarque que $\ln(\ln(n+1)) = \ln\left(\ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)\right) = \ln\left(\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(\ln(n) + o_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln(\ln(n)) + \ln\left(1 + o_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{n \ln(n)}\right)\right) = \ln(\ln(n)) + o_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{n \ln(n)}\right) = \ln(\ln(n)) + o_{n \to +\infty}(\ln(\ln(n)))$.

En particulier, $\sum \frac{1}{k \ln(k)}$ est divergente comme $\ln(\ln(n)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 10 (Règle de l'Hôpital et formule de Taylor-Young)

Soit I un intervalle contenant au moins deux points distincts.

Partie I. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I.

1. Soit $a, b \in I$, $a < b$. On pose

$$\varphi : t \in [a, b] \mapsto (f(b) - f(a))(g(t) - g(a)) - (f(t) - f(a))(g(b) - g(a))$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

C'est le théorème des accroissements finis généralisés.

2. Application 1. Démontrer le théorème des accroissements finis à partir du résultat précédent.

3. Application 2. Soit $x_0 \in I$. On suppose que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et que g, g' ne s'annulent pas sur $I \setminus \{x_0\}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$. *C'est la règle de l'Hôpital.*

Partie II. Soit $x_0 \in I$. On souhaite montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété : pour toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admettant une dérivée d'ordre n en x_0, on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{(x - x_0)^n} \left(f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} \right) = 0.$$

1. Montrer que la propriété est vraie au rang $n = 1$.
2. On suppose la propriété vraie au rang n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant une dérivée d'ordre $n + 1$ en x_0. Soit $h : x \in I \mapsto f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n+1} f^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!}$ et $g : x \in I \mapsto \frac{\varepsilon}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$.
   a) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I$, on a $|h'(x)| \leqslant |g'(x)|$.
   b) En appliquant le TAF généralisé, terminer la récurrence.

Correction.

Partie I.

1. La fonction φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ donc d'après le théorème de Rolle il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or $\varphi'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - f'(c)(g(b) - g(a))$. D'où la conclusion souhaitée.
2. En posant $g : t \in I \mapsto t$, on a bien g dérivable sur I et $g' = 1$. Ainsi d'après la précédente question, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. C'est le TAF.
3. Notons que $x_0 \in \overline{I \setminus \{x_0\}}$ car comme I contient au moins deux points distincts, il existe $\eta > 0$ tel que $]x_0, x_0 + \eta[\subset I \setminus \{x_0\}$ ou $]x_0 - \eta, x_0[\subset I \setminus \{x_0\}$. Cela fait donc bien sens de parler de la limite $\frac{f}{g}$ en x_0, qui est définie sur $I \setminus \{x_0\}$, ainsi que de la limite de $\frac{f'}{g'}$ en x_0, qui est définie au moins sur $I \setminus \{x_0\}$.

   Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ et $\frac{f'}{g'}$ au moins définie sur $I \setminus \{x_0\}$ par hypothèse, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap (I \setminus \{x_0\}), \quad \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| < \varepsilon.$$

   Soit $x_1 \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap (I \setminus \{x_0\})$ (qui existe bien d'après la discussion en début de question). Supposons sans perte de généralité que $x_0 < x_1$ (le cas $x_1 < x_0$ se traitant de la même manière). Alors d'après la question 1., il existe $c \in]x_0, x_1[$ tel que $(f(x_1) - f(x_0))g'(c) = f'(c)(g(x_1) - g(x_0))$, i.e. $f(x_1)g'(c) = f'(c)g(x_1)$, comme $g(x_0) = f(x_0) = 0$. De plus comme g, g' ne s'annulent pas sur $I \setminus \{x_0\}$, on a donc $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x_1)}{g(x_1)}$. Or $]x_0, x_1[\subset I \setminus \{x_0\}$ car $x_0, x_1 \in I$ et I intervalle, et $]x_0, x_1[\subset]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, d'où $c \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap (I \setminus \{x_0\})$. Par conséquent $\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - \ell \right| < \varepsilon$, et donc $\left| \frac{f(x_1)}{g(x_1)} - \ell \right| < \varepsilon$. On a bien montré que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Partie II.

1. Au rang 1 la propriété est simplement la définition de la dérivabilité de f en x_0.
2. a) f' admet une dérivée n-ème en x_0 donc par HR, on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{(x - x_0)^n} \left(\underbrace{f'(x) - f'(x_0) - \sum_{k=1}^{n} f^{(k+1)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!}}_{=h'(x)} \right) = 0.$$

   Par définition de la limite, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I$, $\left| \frac{1}{(x-x_0)^n} h'(x) \right| \leqslant \varepsilon$, i.e. $|h'(x)| \leqslant \varepsilon |x - x_0|^n$. Or $g'(x) = \varepsilon (x - x_0)^n$, d'où la conclusion.

   b) Les fonctions h et g sont dérivables sur I, car admettant des dérivées d'ordre $n + 1 \geqslant 2$ en x_0, donc d'après la question 1. de la partie I, pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I \setminus \{x_0\}$, il existe $c \in]x_0, x[$ tel que $(h(x) - h(x_0))g'(c) = (g(x) - g(x_0))h'(c)$. D'où $|h(x) - h(x_0)| \cdot |g'(c)| = |g(x) - g(x_0)| \cdot |h'(c)| \leqslant |g(x) - g(x_0)| \cdot |g'(c)|$. Comme $c \in]x_0, x[$, on a $g'(c) \neq 0$ d'où $|h(x) - h(x_0)| \leqslant |g(x) - g(x_0)| = \varepsilon \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$. On a donc, pour $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I \setminus \{x_0\}$

$$\frac{1}{|x - x_0|^{n+1}} \left| f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n+1} f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} \right| \leqslant \varepsilon.$$

D'où la propriété est vraie au rang $n+1$.

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $f(0) > 0$, $f'(0) > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On se propose de construire par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}_+$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x_n) = 0$.

1. Construire x_1.

2. Hérédité : on suppose construits $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ vérifiant l'hypothèse souhaitée.

 a) Raisonner par l'absurde et montrer que $f^{(n)}$ est soit strictement croissante et strictement positive, soit strictement décroissante et strictement négative.

 b) En appliquant un développement de Taylor-Lagrange en $a > x_n$ pour tout $x > a$, obtenir une contradiction.

Correction.

1. Si f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ alors comme $f'(0) > 0$ et f' est continue, on a $f' > 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f(0) > 0$, f ne peut avoir une limite nulle en $+\infty$. Soit donc $x_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que $f'(x_1) = 0$.

2. Supposons construits pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ tels que $f^{(k)}(x_k) = 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. Montrons que l'on peut trouver $x_{n+1} > x_n$ qui annule $f^{(n+1)}$. Raisonnons par l'absurde en supposons que $f^{(n+1)}$ ne s'annule pas sur $]x_n, +\infty[$. Comme $f^{(n+1)}$ est continue, elle est de signe constant sur $]x_n, +\infty[$, par exemple strictement positive. Ainsi $f^{(n)}$ est strictement croissante sur $]x_n, +\infty[$ donc strictement positive sur cet intervalle puisque $f^{(n)}(x_n) = 0$. Soit $a > x_n$ et $x > a$ alors comme f est $\mathcal{C}^\infty$, par la formule de Taylor-Lagrange, il existe $c \in]a, x[$ tel que
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(c)\frac{(x-a)^n}{n!}.$$
Comme $f^{(n)}$ est strictement croissante, on a $f^{(n)}(c) > f^{(n)}(a) > 0$, d'où pour tout $x > a$
$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}.$$
Le terme de droite tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$ puisque $f^{(n)}(a) > 0$. C'est absurde.

Exercice 12

Soit P une fonction polynomiale de degré impair et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}| \leqslant |P|$.

1. Justifier qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $P(x_0) = 0$.

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n \in]x_0, x[$ tel que $|f(x)| \leqslant |P(c_n)|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$.

3. En déduire que $f = 0$.

Correction.

1. Comme P est de degré impair, on a $\lim_{x\to+\infty} P(x) = -\lim_{x\to-\infty} P(x) = (\varepsilon)\infty$ avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Puisque P est continue, on déduit par le TVI que P admet au moins une racine sur $\mathbb{R}$, que l'on note x_0.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n, donc il existe $c_n \in]x_0, x[$ tel que
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c_n)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$
Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|f^{(k)}(x_0)| \leqslant |P(x_0)| = 0$ et $|f^{(n+1)}(c_n)| \leqslant |P(c_n)|$, on obtient l'inégalité souhaitée.

3. P est continue sur $\mathbb{R}$, donc est bornée sur le segment $[x_0, x]$. Soit $M > 0$ une constante qui majore $|P|$ sur $[x_0, x]$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|P(c_n)| \leqslant M$. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(x)| \leqslant M\frac{(x-x_0)^n}{(n+1)!}$. En passant à la limite $n \to +\infty$, on obtient $f(x) = 0$. Vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $f = 0$.