Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 2$^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2023-2024
Analyse 3

Feuille de TD n°8

Fonctions : dérivabilité.

Exercice 1

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser, dans chacun des cas suivants, le domaine sur lequel la fonction est dérivable et calculer la dérivée.

1. $f(x) = \sin(3g(x^2))$,
2. $f(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$,
3. $f(x) = (g(x)^3 + 1)^{\sqrt{x}}$,
4. $f(x) = \arccos(\ln(x^2))$.

Exercice 2

Soit $f : t \mapsto \dfrac{\sin(3t)}{t}$. Donner le domaine de définition de f, étudier l'éventuel prolongement par continuité, puis déterminer si ce prolongement est de classe C^1.

Exercice 3

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction que l'on note $\tilde{f}$.
3. Montrer que $\tilde{f}$ admet un DL_2 en 0.
4. En déduire que $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que $\tilde{f}$ n'est pas deux fois dérivable en 0. *Indication : on pourra étudier le taux d'accroissement de $\tilde{f}'$ en* 0.

Exercice 4

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant (x-y)^2.$$

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ pour tout $x \geqslant 0$ et $f(x) = \mathrm{ch}(\sqrt{-x})$ pour tout $x < 0$.

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
3. Montrer que f est dérivable à droite et à gauche en 0. Puis dérivable en 0.
4. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 6

Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction dérivable sur $]a, b]$ et telle que f' admet une limite (à droite) en a.

1. Montrer que f' est bornée sur un voisinage de a dans $]a, b]$.
2. En déduire que f est λ-lipschitzienne sur un voisinage de a dans $]a, b]$, pour un certain $\lambda > 0$.
3. Montrer que f est uniformément continue sur $]a, b]$.
4. ($\star$) En déduire que f est prolongeable par continuité en a. On notera $\tilde{f}$ le prolongement.
5. ($\star$) Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable (à droite) en a, puis de dérivée continue en a.

Nous avons montré que f est prolongeable en a en une fonction dérivable sur $[a, b]$ et à dérivée continue en a. C'est le théorème de la limite de la dérivée.

Exercice 7

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction N fois dérivable sur $[a, b]$ et qui s'annule en $N + 1$ points, avec $N \geqslant 1$. Montrer que $f^{(N)}$ s'annule au moins une fois.

Exercice 8
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

Exercice 9
Appliquer le théorème des accroissements finis à $f : x \in]1, +\infty[\mapsto \ln(\ln(x))$ sur $[k, k+1]$ pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et en déduire que $\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\ln(k)}$ est divergente et que $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

Exercice 10 (Règle de l'Hôpital et formule de Taylor-Young)
Soit I un intervalle contenant au moins deux points distincts.

Partie I. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I un intervalle.

1. Soit $a, b \in I$, $a < b$. On pose
$$\varphi : t \in [a, b] \mapsto (f(b) - f(a))(g(t) - g(a)) - (f(t) - f(a))(g(b) - g(a))$$
Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$(f(b) - f(a))g'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$
C'est le théorème des accroissements finis généralisés.

2. Application 1. Démontrer le théorème des accroissements finis à partir du résultat précédent.

3. Application 2. Soit $x_0 \in I$. On suppose que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et que g, g' ne s'annulent pas sur $I \setminus \{x_0\}$. Montrer que si $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$. *C'est la règle de l'Hôpital.*

Partie II. Soit $x_0 \in I$. On souhaite montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété : pour toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admettant une dérivée d'ordre n en x_0, on a
$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{(x-x_0)^n} \left(f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} \right) = 0.$$

1. Montrer que la propriété est vraie au rang $n = 1$.

2. On suppose la propriété vraie au rang n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant une dérivée d'ordre $n+1$ en x_0. Soit $h : x \in I \mapsto f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n+1} f^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!}$ et $g : x \in I \mapsto \frac{\varepsilon}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$.
   a) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I$, on a $|h'(x)| \leqslant |g'(x)|$.
   b) En appliquant le TAF généralisé, terminer la récurrence.

Exercice 11
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $f(0) > 0$, $f'(0) > 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On se propose de construire par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}_+$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x_n) = 0$.

1. Construire x_1.

2. Hérédité : on suppose construits $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ vérifiant l'hypothèse souhaitée.
   a) Raisonner par l'absurde et montrer que $f^{(n)}$ est soit strictement croissante et strictement positive, soit strictement décroissante et strictement négative.
   b) En appliquant un développement de Taylor-Lagrange en $a > x_n$ pour tout $x > a$, obtenir une contradiction.

Exercice 12
Soit P une fonction polynomiale de degré impair et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}| \leqslant |P|$.

1. Justifier qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $P(x_0) = 0$.

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n \in]x_0, x[$ tel que $|f(x)| \leqslant |P(c_n)| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$.

3. En déduire que $f = 0$.