Licence $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2023-2024
ANALYSE 3

Feuille de TD n°7

Fonctions : continuité sur un intervalle et sur un segment, continuité uniforme.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\exists \alpha > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \geqslant \alpha |x - y|.$$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que $|f|$ admet comme limite $+\infty$ en $\pm\infty$.
3. Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \neq \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
4. Montrer que f est bijective.

Correction.

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, tels que $f(x) = f(y)$. Alors par hypothèse, $|x - y| = 0$. D'où f est injective.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty$ si : $\quad \forall M \in \mathbb{R},\ \exists x_M \in \mathbb{R},\ \forall x \geqslant x_M,\ |f(x)| \geqslant M.$
Cherchons donc à faire apparaître la variable $|f(x)|$ à partir de l'hypothèse de l'énoncé.
On applique l'inégalité de l'énoncé pour $x \in \mathbb{R}$ et $y = 0$, et on déduit après application de l'inégalité triangulaire que $|f(x)| \geqslant \alpha |x| - |f(0)|$. D'où la conclusion par passage à la limite dans l'inégalité.
Même si on utilise finalement un raccourci grâce au cours dans notre démonstration, la définition a permis de trouver l'intuition : "minorer $|f(x)|$".
3. Il s'agit de montrer que les limites en $\pm\infty$, qui sont infinies, ne peuvent pas être de même signe puisque f est injective.
Supposons par l'absurde que $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Posons $y = f(0) + 1$. Puisque $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $a < -1$ tel que pour tout $x < a$, $f(x) > y$. De même, il existe $b > 1$ tel que pour tout $x > b$, $f(x) > y$. Puisque f est continue, on a $f(a) \geqslant y > f(0)$ et $f(b) \geqslant y > f(0)$. Ainsi, puisque f est continue sur $[a, 0]$ et $[0, b]$, il existe d'après le TVI, $x_1 \in [a, 0]$ et $x_2 \in [0, b]$ tels que $f(x_1) = y = f(x_2)$ et par construction, $x_1, x_2 \neq 0$ donc $x_1 \neq x_2$. Ceci contredit le fait que f est injective.
On montre de même que l'on ne peut avoir $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
4. D'après la question précédente, seuls deux cas sont possibles :
   - $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$,
   - $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Supposons que l'on soit dans le premier cas. Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors par un raisonnement similaire à la question précédente, on montre qu'il existe $x_1 > 0$ tel que $f(x_1) > y$ et $x_0 < 0$ tel que $f(x_0) < y$. Ainsi $y \in]f(x_0), f(x_1)[$ et par le TVI, on conclut qu'il existe $t \in]x_0, x_1[$ tel que $f(t) = y$.
L'autre cas se traite de la même manière. Ainsi nécessairement f est surjective donc bijective puisque déjà injective.

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

1. Montrer que pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et convergeant vers 0, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
2. Montrer que pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et convergeant vers 0, $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite indépendante de la suite u.
3. Montrer que f est prolongeable en une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue.

Correction.

1. Une suite v est de Cauchy ssi
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geqslant N_\varepsilon,\ |v_p - v_q| < \varepsilon\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^*$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $|x - y| < \eta$, on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers 0. Comme u converge, elle est de Cauchy donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $|u_{n+p} - u_n| < \eta$, d'où $|f(u_{n+p}) - f(u_n)| < \varepsilon$. Ainsi $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite de Cauchy.

2. Soit u et v deux suites de $\mathbb{R}^*$ qui convergent vers 0. D'après ce qui précède $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy donc convergent vers respectivement $\ell_u \in \mathbb{R}$ et $\ell_v \in \mathbb{R}$.

Définissons w la suite telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \begin{cases} u_n, & n \text{ pair}, \\ v_n, & n \text{ impair}, \end{cases}$$
qui est donc également une suite de $\mathbb{R}^*$. Soit $\varepsilon > 0$, comme u et v convergent vers 0, il existe respectivement $N_u \in \mathbb{N}$ et $N_v \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geqslant N_u$, on a $|u_n| < \varepsilon$, et pour tout $n \geqslant N_v$, on a $|v_n| < \varepsilon$. Ainsi pour $n \geqslant \max(N_u, N_v)$, si n est pair alors $w_n = u_n$ et comme $n \geqslant N_u$, on a donc $|w_n| < \varepsilon$, et si n est impair alors $w_n = v_n$ et comme $n \geqslant N_v$, on a donc $|w_n| < \varepsilon$. Dans tous les cas, on a bien $|w_n| < \varepsilon$. Par conséquent, w tend vers 0.

D'après 1., la suite $f(w)$ est donc également de Cauchy et converge vers ainsi vers un certain $\ell_w \in \mathbb{R}$. Or la suite $(f(w_{2n}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $f(w)$ donc converge également vers ℓ_w. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(w_{2n}) = f(u_{2n})$, par définition de w, et $(f(u_{2n}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_u comme sous-suite de $f(u)$. Par unicité de la limite d'une suite, on obtient $\ell_w = \ell_u$. De même la suite $(f(w_{2n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $f(w)$ donc converge vers ℓ_w. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(w_{2n+1}) = f(v_{2n+1})$, par définition de w, et $(f(v_{2n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_v comme sous-suite de $f(v)$. Par unicité de la limite d'une suite, on obtient $\ell_w = \ell_v$.

On a finalement montré que $\ell_u = \ell_v$. Par conséquent dès que u est une suite de $\mathbb{R}^*$ convergeant vers 0, alors $f(u)$ est une suite convergente vers une limite qui ne dépend pas de la suite u. Notons ℓ cette limite.

3. D'après la question précédente, on a trouvé $\ell \in \mathbb{R}$ telle que pour toute suite u d'éléments de $\mathbb{R}^*$ et convergeant vers 0, on a $f(u)$ converge vers ℓ. Par la caractérisation séquentielle de la limite, on a $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = \ell$.

Rappel : prolongement par continuité. Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{D_f} \setminus D_f$. Si f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0, alors on dit que f est prolongeable par continuité en x_0.

De plus si on définit $\tilde{f} : D_f \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ par
$$\forall x \in D_f \cup \{x_0\}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ \ell, & x = x_0, \end{cases}$$
alors $\tilde{f}$ est appelée le prolongement par continuité de f en x_0 et d'après le cours, $\tilde{f}$ est continue en x_0.

Ainsi f est prolongeable par continuité en 0. Ce prolongement, que l'on note $\tilde{f}$, est défini pour tout $x \neq 0$, $\tilde{f}(x) = f(x)$ et $\tilde{f}(0) = \ell$. On sait alors que nécessairement $\tilde{f}$ est continue en 0.

D'après le théorème de Heine, $\tilde{f}$ est donc uniformément continue sur $[-1, 1]$. Montrons alors que $\tilde{f}$ l'est sur $\mathbb{R}$ par uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}^*$. Soit $\varepsilon > 0$, d'après nos hypothèses, on a

$$\exists \eta > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^*,\ |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,, \tag{1}$$

et

$$\exists \eta' > 0,\ \forall x, y \in [-1, 1],\ |x - y| < \eta' \implies |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| < \varepsilon\,. \tag{2}$$

Ainsi, posons $\eta'' = \min(\eta, \eta', \frac{1}{2}) > 0$, alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| < \eta''$, on a

— soit $x, y \in [-1, 1]$ d'où $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| < \varepsilon$ d'après (2) car $\eta'' \leqslant \eta$,

— soit $x \notin [-1, 1]$ or $\eta'' \leqslant \frac{1}{2}$ d'où $x, y \in \mathbb{R}^*$ donc $\tilde{f}(x) = f(x)$ et $\tilde{f}(y) = f(y)$ et donc $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| = |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ d'après (1) comme on a également $\eta'' \leqslant \eta'$,

— soit $y \notin [-1, 1]$ et on raisonne de même.

Dans tous les cas, on a bien montré que $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| < \varepsilon$. D'où $\tilde{f}$ est UC sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$. On suppose que f est K-lipschitzienne, avec $K \geqslant 0$, c'est-à-dire

$$\forall x, x' \in D_f, \quad |f(x) - f(x')| \leqslant K|x - y|.$$

1. Montrer que f est uniformément continue sur D_f.

2. a) Montrer que $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction lipschitzienne sur tout $[\varepsilon, +\infty[$ avec $\varepsilon > 0$.

b) Montrer que $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Correction.

1. Si $K = 0$, alors f est constante et donc est uniformément continue. Sinon supposons que $K > 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = \frac{\varepsilon}{K} > 0$. Alors pour tout $x, y \in D_f$, si $|x-y| < \eta$ alors $|f(x)-f(y)| \leqslant K|x-y| < \varepsilon$. D'où f est uniformément continue sur D_f.

2. a) Soit $\varepsilon > 0$ et $x, x' \geqslant \varepsilon$. On a $|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| = \left|\frac{x-x'}{\sqrt{x}+\sqrt{x'}}\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}|x - x'|$. D'où la fonction racine est $\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$-lipschitzienne sur $[\varepsilon, +\infty[$.

b) On remarque que si on fait $\varepsilon \to 0$, la constante de Lipschitz tend vers $+\infty$. Cela semble donc attendue que la fonction racine carrée ne soit pas lipschitzienne.

Supposons par l'absurde qu'elle soit K-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$, avec $K \geqslant 0$. Alors pour tout $x, x' \in \mathbb{R}_+$, $x \neq x'$, on a $|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| = \left|\frac{x-x'}{\sqrt{x}+\sqrt{x'}}\right| \leqslant K|x - x'|$. D'où $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x'}} \leqslant K$. En prenant $x' = 0$ et en faisant $x \to 0$, on obtient une contradiction. D'où f n'est pas lipschitzienne.

Exercice 11

Soient I un intervalle fermé et $f : I \to I$ une fonction λ-lipschitzienne avec $\lambda < 1$.

1. On suppose que $\lambda < 1$ (on dit alors que f est λ-contractante). Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Justifier que u est bien définie.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \lambda^n|u_1 - u_0|$.

c) En déduire que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$

$$|u_{n+p} - u_n| \leqslant \frac{\lambda^n - \lambda^{n+p}}{1-\lambda}|u_1 - u_0|.$$

d) Montrer que u est une suite de Cauchy.

e) Montrer que u converge dans I. Notons $\ell \in I$ sa limite, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n - \ell| \leqslant \frac{|u_1 - u_0|}{1-\lambda}\lambda^n.$$

f) Montrer que f admet un point fixe et qu'il est nécessairement unique. *C'est le théorème du point fixe de Banach-Picard.*

g) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 1}$ converge vers le nombre d'or.

2. Soit $g : I \to I$ une fonction. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $0 < \lambda < 1$ tel que $g^k = \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{k \text{ fois}}$ est λ-lipschitzienne. Montrer alors que g admet un unique point fixe.

Correction.

1. a) Comme $f(I) \subset I$, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$. Donc la suite u est bien définie.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leqslant \lambda|u_n - u_{n-1}| \leqslant \ldots \leqslant \lambda^n|u_1 - u_0|$.

c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
|u_{n+p} - u_n| &\leqslant |u_{n+p} - u_{n+p-1}| + |u_{n+p-1} - u_{n+p-2}| + \ldots + |u_{n+1} - u_n|, \\
&\leqslant \lambda^{n+p-1}|u_1 - u_0| + \lambda^{n+p-2}|u_1 - u_0| + \ldots + \lambda^n|u_1 - u_0|, \\
&= \lambda^n|u_1 - u_0|(\lambda^{p-1} + \ldots + \lambda + 1) = \frac{\lambda^n - \lambda^{n+p}}{1-\lambda}|u_1 - u_0|.
\end{aligned}$$

L'inégalité est trivialement vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et $p = 0$, d'où elle est finalement vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$.

d) On a pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, $|u_{n+p} - u_n| \leqslant \frac{\lambda^n - \lambda^{n+p}}{1-\lambda}|u_1 - u_0| \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|u_1 - u_0|$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\frac{\lambda^n}{1-\lambda}|u_1 - u_0| < \varepsilon$ (puisque ce terme tend vers 0 comme $0 < \lambda < 1$). Ainsi pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on a $|u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$. La suite u est donc de Cauchy.

e) La suite u est de Cauchy donc converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, puisque toute suite de Cauchy réelle converge dans $\mathbb{R}$. L'élément ℓ est adhérent à I car pour tout $\varepsilon > 0$, $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\cap I$ est non vide car contient tous les éléments de la suite u APCR. Or I est fermé, c'est-à-dire $\bar{I} = I$. D'où la limite ℓ de u est dans I.

Comme pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, on a $|u_{n+p} - u_n| \leqslant \frac{\lambda^n - \lambda^{n+p}}{1-\lambda}|u_1 - u_0|$, $\lim\limits_{p \to +\infty} |u_{n+p} - u_n| = |\ell - u_n|$ et $\lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{\lambda^n - \lambda^{n+p}}{1 - \lambda}|u_1 - u_0| = \dfrac{\lambda^n}{1 - \lambda}|u_1 - u_0|$ (comme $\lambda \in [0, 1[$), par passage à la limite dans l'inégalité, on obtient donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\ell - u_n| \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|u_1 - u_0|$.

f) Par continuité de f en $\ell \in I$, comme u est une suite de I qui tend vers $\ell \in I$, on déduit de la caractérisation séquentielle de continuité que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$. Ainsi par passage à la limite dans l'égalité : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $\ell = f(\ell)$. La fonction f admet donc ℓ comme point fixe. Supposons que $\ell' \in I$ est également un point fixe de f avec $\ell' \neq \ell$. Alors $|\ell - \ell'| = |f(\ell) - f(\ell')| \leqslant \lambda|\ell - \ell'| < |\ell - \ell'|$. Absurde. Donc $\ell' = \ell$. f admet un unique point fixe sur I.

On a montré qu'une fonction $f : I \to I$, λ-lipschitzienne sur l'intervalle I, avec $\lambda < 1$ (on dit que f est contractante sur I), admet un unique point fixe sur I, i.e. il existe un unique $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$. C'est le théorème du point fixe de Banach-Picard.

g) Soit pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x+1}$. On a $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$ et pour tout $x, y \geqslant 0$, $|f(x) - f(y)|(f(x) + f(y)) = |x - y|$. Or $f(x) + f(y) \geqslant 2$. D'où f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne. Ainsi f admet un unique point fixe d'après ce qui précède. Ce dernier est la racine positive du polynôme $X^2 - X - 1$, qui est le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. D'après ce qui précède, g^k admet un unique point fixe $\ell \in I$. On a $g^k(\ell) = \ell$, d'où $g(g^k(\ell)) = g(\ell)$, et donc $g^k(g(\ell)) = g(\ell)$. L'élément $g(\ell)$ est ainsi encore un point fixe de g^k. Par unicité, on déduit $g(\ell) = \ell$. D'où ℓ est un point fixe de g et il est unique car sinon si g en admettait un autre, celui-ci serait automatiquement également un point fixe de g^k.