Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 2$^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2023-2024
Analyse 3

Feuille de TD n°7

Fonctions : continuité sur un intervalle et sur un segment, continuité uniforme.

Exercices complémentaires d'entraînement

1. Exercices corrigés : prise en main

Exercice 1
Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que pour tout $x \in I$, $f(x)^2 = 1$. Montrer alors que pour tout $x \in I$, $f(x) = 1$ ou pour tout $x \in I$, $f(x) = -1$.
2. Montrer que si $f(I)$ est fini alors f est constante.

Correction.

1. On a pour tout $x \in I$, $f(x) = \pm 1$. Comme par le TVI, $f(I)$ est un intervalle et $f(I) \subset \{-1, 1\}$. On déduit donc que $f = 1$ ou $f = -1$.
2. D'après le TVI, $f(I)$ est un intervalle, or tout intervalle non vide et fini est un singleton. Autrement dit, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(I) = \{c\}$, *i.e.* pour tout $x \in I$, $f(x) = c$.

Exercice 2
Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -\pi \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1} f(x) = \sqrt{2}\,.$$

Montrer qu'il existe $x_0 \in]-1, 1[$ tel que $f(x_0) = \frac{1}{2}$.

Correction.
Méthode 1 : par prolongement par continuité.
Puisque f est continue et admet des limites finies en -1 et 1, elle admet le prolongement par continuité suivant

$$\tilde{f} : x \in [-1, 1],\ x \mapsto \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si } x = 1 \\ f(x) & \text{si } x \in]-1, 1[\\ -\pi & \text{si } x = -1 \end{cases}.$$

Puisque $\tilde{f}$ est continue sur $[-1, 1]$ et que $\frac{1}{2} \in [\tilde{f}(-1), \tilde{f}(1)] = [-\pi, \sqrt{2}]$, il existe, d'après le TVI, $x_0 \in [-1, 1]$ tel que $\tilde{f}(x_0) = \frac{1}{2}$ et par élimination, $x_0 \notin \{-1, 1\}$ donc $\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \frac{1}{2}$.
Méthode 2 : uniquement à partir des définitions.
Posons $\varepsilon = \pi$. Puisque $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\pi$, on a

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in]-1, -1 + \eta[\cap]-1, 1[,\ -2\pi < f(x) < 0\,.$$

Posons $\varepsilon' = \sqrt{2} - 1$. Puisque $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \sqrt{2}$, on a

$$\exists \eta' > 0,\ \forall x \in]1 - \eta', 1[\cap]-1, 1[,\ 1 < f(x) < 2\sqrt{2} - 1\,.$$

Posons alors $x_1 = \min(-1 + \frac{\eta}{2}, 0)$ et $x_2 = \max(0, 1 - \frac{\eta'}{2})$. Alors, $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 1$, f est continue sur $[x_1, x_2]$ et $\frac{1}{2} \in [f(x_1), f(x_2)]$ donc d'après le TVI, il existe $x_0 \in [x_1, x_2] \subset]-1, 1[$ tel que $f(x_0) = \frac{1}{2}$.

Exercice 3
Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction K-lipschitzienne, $K \geqslant 0$. On dira que σ est une subdivision de $[a, b]$ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_n \in [a, b]$ tels que $\sigma = (a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ et

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b.$$

On note alors

$$V(f, \sigma) := \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$

1. Montrer que l'ensemble $V_f := \{V(f, \sigma) \,/\, \sigma \text{ subdivision de } [a, b]\}$ admet une borne supérieure. On la note $V(f)$ et on dit que f *est à variation bornée.*
2. On considère $f : x \in [a, b] \mapsto x^2$. Montrer que f est K-lipschtizienne, pour un certain $K \geqslant 0$. Déterminer $V(f)$.

Correction.

1. L'ensemble V_f est non vide, car par exemple contient la quantité $|f(b)-f(a)|$ correspondant à la subdivision $\sigma=(a,b)$. Comme f est K-lipschitzienne sur $[a,b]$, pour tout $x,x'\in[a,b]$, on a $|f(x)-f(x')|\leqslant K|x-x'|$. Soit $\sigma=(a_0,a_1,\dots,a_n)$, $n\in\mathbb{N}^*$, une subdivision de $[a,b]$. Alors $V(f,\sigma)\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}K|a_{i+1}-a_i|=K\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)=K(b-a)$. D'où V_f est majorée (par $K(b-a)$). Par le théorème d'existence de la borne supérieure, V_f admet une borne supérieure.

2. On a pour tout $x,x'\in[a,b]$, $|f(x)-f(x')|=|x^2-x'^2|=|x+x'||x-x'|\leqslant(|x|+|x'|)|x-x'|\leqslant 2\max(|a|,|b|)|x-x'|$. D'où f est $2\max(|a|,|b|)$-lipschitzienne. Ainsi on sait que f est à variation bornée.

Soit $\sigma=(a_0,a_1,\dots,a_n)$, $n\in\mathbb{N}^*$, une subdivision de $[a,b]$. Alors $V(f,\sigma)=\sum_{i=0}^{n-1}|a_{i+1}^2-a_i^2|=\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}^2-a_i^2)=a_n^2-a_0^2=b^2-a^2$. D'où $V_f=\{b^2-a^2\}$ et donc $V(f)=b^2-a^2$.

Exercice 4

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\,.$$

Montrer que $\min\{f(x)\,/\,x\in\mathbb{R}\}$ existe.

Correction.

Il s'agit de montrer que f atteint sa borne inférieure.

Par définition des limites, il existe $B_1<0$ et $B_2>0$ tels que

$$\forall x\in]-\infty,B_1[,\ f(x)>f(0) \quad \text{et} \quad \forall x\in]B_2,+\infty[,\ f(x)>f(0)\,.$$

Puisque f est continue sur $[B_1,B_2]$, il existe, d'après le cours, $m\in\mathbb{R}$ et $c\in[B_1,B_2]$ tels que $f(c)=m$ et pour tout $x\in[B_1,B_2]$, $f(x)\geqslant m$. En particulier, $f(0)\geqslant m$ donc on a aussi pour tout $x\in]-\infty,B_1[\cup]B_2,+\infty[$, $f(x)>f(0)\geqslant m$. Finalement m est un minorant de $\operatorname{Im}f$ et $m\in\operatorname{Im}f$ donc $m=\min(\operatorname{Im}f)$.

2. Exercices corrigés : révisions et approfondissement

Exercice 5

Soit $f:]0,1[\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to1}f(x)=2$ et satisfaisant au voisinage de 0, $f(x)=\sin(x^3)\ln(\tan(x^2))+\underset{x\to0}{o}(x^2)$. Montrer qu'il existe $x_0\in]0,1[$ tel que $f(x_0)=1$.

Correction.

On reconnaît une problématique du théorème des valeurs intermédiaires. Pour appliquer ce théorème, nous allons prolonger f par continuité sur $[0,1]$.

On a $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\sin(x^3)\ln(\tan(x))$. Or, $\tan(x^2)=x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)$, donc $\ln(\tan(x^2))=\ln\left(x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)\right)=\ln(x^2)+\ln\left(1+\underset{x\to0}{o}(1)\right)=2\ln(x)+\underset{x\to0}{o}(1)$ donc $\sin(x^3)\ln(\tan(x))=2(x^3+\underset{x\to0}{o}(x^3))(\ln(x)+\underset{x\to0}{o}(1))=2x^3\ln x+\underset{x\to0}{o}(x^3\ln x)$. Donc $\lim_{x\to0}f(x)=0$.

Puisque f admet une limite finie en 0 et en 1, elle se prolonge par continuité en la fonction

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ f(x) & \text{si } x\in]0,1[\\ 2 & \text{si } x=1\end{cases}.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à la fonction continue $\tilde{f}$ sur le segment $[0,1]$, il existe donc $x_0\in[0,1]$ tel que $\tilde{f}(x_0)=1$ (car $1\in[\tilde{f}(0),\tilde{f}(1)]$). Puisque $\tilde{f}(0)=0$ et $\tilde{f}(1)=2$, on a $x_0\in]0,1[$ d'où $1=\tilde{f}(x_0)=f(x_0)$.