Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2023-2024
ANALYSE 3

Feuille de TD n°7

Fonctions : continuité sur un intervalle et sur un segment, continuité uniforme.

Exercices complémentaires d'entraînement

1. Exercices corrigés : prise en main

Exercice 1
Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que pour tout $x \in I$, $f(x)^2 = 1$. Montrer alors que pour tout $x \in I$, $f(x) = 1$ ou pour tout $x \in I$, $f(x) = -1$.
2. Montrer que si $f(I)$ est fini alors f est constante.

Exercice 2
Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -\pi \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1} f(x) = \sqrt{2}\,.$$

Montrer qu'il existe $x_0 \in]-1, 1[$ tel que $f(x_0) = \frac{1}{2}$.

Exercice 3
Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction K-lipschitzienne, $K \geqslant 0$. On dira que σ est une subdivision de $[a, b]$ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_n \in [a, b]$ tels que $\sigma = (a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b.$$

On note alors

$$V(f, \sigma) := \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$

1. Montrer que l'ensemble $V_f := \{V(f, \sigma) \,/\, \sigma \text{ subdivision de } [a, b]\}$ admet une borne supérieure. On la note $V(f)$ et on dit que f *est à variation bornée.*
2. On considère $f : x \in [a, b] \mapsto x^2$. Montrer que f est K-lipschtizienne, pour un certain $K \geqslant 0$. Déterminer $V(f)$.

Exercice 4
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Montrer que $\min\{f(x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$ existe.

2. Exercices corrigés : révisions et approfondissement

Exercice 5
Soit $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ et satisfaisant au voisinage de 0, $f(x) = \sin(x^3)\ln(\tan(x^2)) + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0, 1[$ tel que $f(x_0) = 1$.