Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2023-2024
Analyse 3

Feuille de TD n°7

Fonctions : continuité sur un intervalle et sur un segment, continuité uniforme.

Exercice 1 (Cours : théorème des valeurs intermédiaires - formulation alternative)

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Rappeler l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.
2. Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $I \subset D_f$ un intervalle. Montrer alors que $f(I)$ est un intervalle.

Exercice 2

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. a) Montrer que si f est strictement monotone alors f est injective.
   b) En déduire que $f : I \to f(I)$ est une bijection.
2. On suppose désormais que f est continue. Montrer que si f est injective alors f est strictement monotone.
   Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

Exercice 3

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $\ell > 0$ tel que $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\ell$. Montrer qu'il existe $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) = 0$.

Exercice 4 (Zéro d'une fonction polynomiale généralisée)

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$ en $-\infty$. On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k g(x)^k$ avec $a_k \in \mathbb{R}$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$, $a_n \neq 0$ et n impair.

1. Déterminer si g est croissante.
2. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Cette conclusion est-elle toujours vraie si g admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et $+\infty$ en $-\infty$?
4. On suppose g bijective. Est-ce que x_0 est forcément unique ?

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\exists \alpha > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \geqslant \alpha |x - y|.$$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que $|f|$ admet comme limite $+\infty$ en $\pm\infty$.
3. Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x) \neq \lim_{x\to+\infty} f(x)$.
4. Montrer que f est bijective.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que f admet des limites finies en $\pm\infty$. Montrer que f est bornée.
2. On suppose maintenant que f est périodique. Montrer aussi que dans ce cas, f est bornée.

Exercice 7

Soient $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) + m < g(x)$.

Exercice 8
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que

1. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
2. $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 9
Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

1. Montrer que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et convergeant vers 0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
2. Montrer que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et convergeant vers 0, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite indépendante de la suite u.
3. Montrer que f est prolongeable en une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue.

Exercice 10
Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$. On suppose que f est K-lipschitzienne, avec $K \geqslant 0$, c'est-à-dire

$$\forall x, x' \in D_f, \quad |f(x) - f(x')| \leqslant K|x - y|.$$

1. Montrer que f est uniformément continue sur D_f.
2. a) Montrer que $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction lipschitzienne sur tout $[\varepsilon, +\infty[$ avec $\varepsilon > 0$.
   b) Montrer que $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 11
Soient I un intervalle fermé et $f : I \to I$ une fonction λ-lipschitzienne avec $\lambda < 1$.

1. On suppose que $\lambda < 1$ (on dit alors que f est λ-contractante). Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Justifier que u est bien définie.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \lambda^n |u_1 - u_0|$.
   c) En déduire que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$
   $$|u_{n+p} - u_n| \leqslant \frac{\lambda^n - \lambda^{n+p}}{1 - \lambda}|u_1 - u_0|.$$
   d) Montrer que u est une suite de Cauchy.
   e) Montrer que u converge dans I. Notons $\ell \in I$ sa limite, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$|u_n - \ell| \leqslant \frac{|u_1 - u_0|}{1 - \lambda}\lambda^n.$$
   f) Montrer que f admet un point fixe et qu'il est nécessairement unique. *C'est le théorème du point fixe de Picard.*
   g) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 1}$ converge vers le nombre d'or.
2. Soit $g : I \to I$ une fonction. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $0 < \lambda < 1$ tel que $g^k = \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{k \text{ fois}}$ est λ-lipschitzienne. Montrer alors que g admet un unique point fixe.

Exercice 12
Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue satisfaisant

$$\forall x, y \in [a, b],\, x \neq y, \quad |f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

1. Le théorème du point fixe de Picard est-il applicable ?
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [a, b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge. *Indication : on pourra s'intéresser à ses valeurs d'adhérence.*
3. En déduire que f admet un unique point fixe.