Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2023-2024
ANALYSE 3

Feuille de TD n°6

Négligeabilité, équivalents, développements limités.

RAPPEL DE COURS

Formule de Taylor-Young et développement limité. Soit f une fonction définie sur I un intervalle voisinage de $a \in I$. Si f est dérivable n-fois en a alors la Formule de Taylor-Young à l'ordre n en a pour f est donnée par

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + o_{x\to a}((x-a)^n).$$

On dira que f admet un développement limité à l'ordre n en a, noté DL_n en a, si

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n\frac{(x-a)^n}{n!} + o_{x\to a}((x-a)^n).$$

où $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sont nécessairement uniques. Ainsi une fonction n-fois dérivable en a admet nécessairement un DL_n en a. *La réciproque est fausse en général (sauf si $n \in \{0,1\}$).*

On peut effectuer diverses opérations sur les DL, dont sommer, multiplier, quotienter, mais aussi "intégrer". En effet, si f admet F comme primitive sur I et f a un DL_n en a :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \ldots + \alpha_n\frac{(x-a)^n}{n!} + o_{x\to a}((x-a)^n).$$

alors F admet un DL_{n+1} en a donné par :

$$F(x) = F(a) + \alpha_0(x-a) + \alpha_1\frac{(x-a)^2}{2} + \ldots + \alpha_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + o_{x\to a}((x-a)^{n+1}).$$

Développements limités essentiels. On rappelle les deux développements limités en 0 (à connaître par coeur absolument !) suivants :

— "somme géométrique" : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o_{x\to 0}(x^n)$,

— "exponentielle" : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o_{x\to 0}(x^n)$,

Exercice 1

A partir des deux développements limités donnés au dessus, retrouver les développements limités (à l'ordre n quand ce n'est pas précisé) en 0 des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \frac{1}{1+x}$,
2. $x \mapsto \ln(1-x)$,
3. $x \mapsto \ln(1+x)$,
4. DL_3, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, de $x \mapsto (1+x)^\alpha$
5. DL_{2n} de $x \mapsto \cos(x)$,
6. DL_{2n+1} de $x \mapsto \sin(x)$,
7. DL_3 de $x \mapsto \tan(x)$.

Ces développements limités font également partis de la liste de ceux à connaître par coeur.

Exercice 2

A partir des deux développements limités donnés au dessus, trouver les développements limités en 0 des fonctions suivantes.

1. DL_{2n} de $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$.
2. DL_{2n+1} de $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$.
3. DL_3 de $x \mapsto \mathrm{th}(x)$.
4. Sachant que $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, donner un DL_5 de $x \mapsto \arcsin(x)$.
5. $x \mapsto \arctan(x)$.

Il est important de savoir retrouver rapidement ces développements limités par le calcul (au moins les premiers termes). On peut ajouter à la liste celui de arccos qui s'obtient de la même manière que celui de arcsin.

Exercice 3

Dans la suite, quand un équivalent est demandé, on donnera le plus simple.

1. Donner le DL à l'ordre 3 de $x \mapsto e^x$ en 0.
2. Donner le DL à l'ordre 2 de $x \mapsto e^{-2x}$ en 0.
3. $\frac{e^{\frac{x^2}{2}}-1}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\sim} x$?
4. Donner le DL à l'ordre 4 de $x \mapsto \cos(x)$ en 0.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1-\cos(\sqrt{2}x)}{x^n} \underset{x\to 0}{\sim} x$?
6. Donner le DL à l'ordre 3 de $x \mapsto \sin(x)$ en 0.
7. $\sin(x)^4 - x^3 \underset{x\to 0}{\sim} x$?
8. $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$?
9. $\sin\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)^2 + x^3 e^{-x} + xe^x \underset{x\to 0}{\sim} x$?
10. $\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{\sim} x$?
11. $\ln(\tan(x)) \underset{x\to 0}{\sim} x$?
12. $\ln(x)^3 \left(\frac{1}{1+e^{-x}} - \cos(\frac{1}{x})\right) + e^{-2x} \underset{x\to +\infty}{\sim} x$?
13. $x^3 + x^2(\ln(x))^4 \underset{x\to +\infty}{\sim} x$?
14. $x^3 + x^2(\ln(x))^4 \underset{x\to 0}{\sim} x$?
15. $2xe^x + x \underset{x\to 0}{\sim} x$?
16. $(x-2)^2 e^x - (x^5 + 7x^2)e^{\frac{x}{3}} \underset{x\to +\infty}{\sim} x$?
17. $2^x - e^x + x^3 e^{-x} \underset{x\to +\infty}{\sim} x$?
18. $\ln\left(\cos(e^{-x}) + \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) - \frac{1}{x} \underset{x\to +\infty}{\sim} x$?
19. $\frac{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)\ln(1+e^{-x})}{\sin(e^{-x+1})\ln\left(1-\frac{1}{(x+\sqrt{x})^2}\right)} \underset{x\to +\infty}{\sim} x$?
20. Donner le signe à partir d'un certain rang de $-2^n - n^3 + (2n)!$.
21. Donner le signe à partir d'un certain rang de $n^4 - 3n^2 + (\ln(n))^9 - n^3(\ln(n))^2$.
22. $e^{-\sqrt{n}}(n+1)! \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
23. $\ln(1 - \frac{1}{n!}) - \frac{1}{(2n)!} \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
24. $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
25. $\cos(\frac{1}{n^n}) + \frac{1}{(n+3)^2} \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
26. $\sin\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right) + e^{-n} \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
27. $\tan\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right) - \frac{1}{n^n} \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
28. $\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n^2} \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
29. $n^2 e^{\frac{n}{2}} + (n-1)^3 e^{\frac{n}{3}} \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
30. $(n-7)\ln(n^2+2) \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
31. $\frac{n-1}{3}\ln(n)^5 + (n + \sqrt{n+1} - 7)^2 \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
32. $\frac{(n-\pi)^n}{n^n + 10^n - (3n)!} \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
33. $\frac{n}{1-\frac{1}{n^2}} \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
34. $\frac{1}{1-\frac{1}{(n-1)^3}} - \frac{1}{1+\frac{1}{(n+3)^2}} \underset{n\to +\infty}{\sim}$?
35. $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{3n}} \underset{n\to +\infty}{\sim}$?