Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 2$^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2023-2024
Analyse 3

Feuille de TD n°5

Fonctions : limites et continuité.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant
$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x > B, \forall y > B,\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$.

Correction.
Une suite u est de Cauchy ssi
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geqslant N_\varepsilon,\ |u_p - u_q| < \varepsilon\,.$$

Critère séquentiel de la limite (dans le contexte de l'exercice) : f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si et seulement si pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, on a $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Pour montrer que f admet une limite en $+\infty$, l'idée est d'utiliser la caractérisation séquentielle de la limite. Cependant la valeur de la limite de f n'est pas spécifiée dans l'énoncé alors qu'elle apparaît dans le critère. Il va donc falloir faire un raisonnement en deux temps pour identifier la limite.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$.

On veut montrer que $f(u)$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ indépendante de la suite u. Pour l'instant on n'a même pas de candidat pour cette limite. Or quand on ne la connaît, la notion de suite de Cauchy est très utile !

Montrons que la suite $f(u) = (f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, il existe par hypothèse $B_\varepsilon > 0$ tel que
$$\forall x > B_\varepsilon, \forall y > B_\varepsilon,\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,.$$
Puisque u tend vers $+\infty$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N_\varepsilon,\ u_n > B_\varepsilon\,.$$
Ainsi,
$$\forall p, q \geqslant N_\varepsilon,\ |f(u_p) - f(u_q)| < \varepsilon\,.$$
La suite $f(u)$ est donc bien de Cauchy et par conséquent elle est convergente. Notons ℓ_u sa limite.

Montrons que ℓ_u est en fait indépendante de la suite u (tendant vers $+\infty$). Soit v une autre suite réelle tendant vers $+\infty$. Alors par le raisonnement précédent, $f(v)$ converge vers $\ell_v \in \mathbb{R}$. Montrons que $\ell_u = \ell_v$.

Méthode 1 : Soit w la suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{2n} = u_n$ et $w_{2n+1} = v_n$. Alors w tend vers $+\infty$. En effet, soit $A > 1$, comme u tend vers $+\infty$, il existe $N_u \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N_u$, $u_k > A$. De même comme v tend vers $+\infty$, il existe $N_v \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N_v$, $v_k > A$. Soit $n \geqslant N = \max(2N_u, 2N_v + 1)$. Si n est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Comme $n \geqslant 2N_u$, on a donc $k \geqslant N_u$ et donc $w_n = w_{2k} = u_k > A$. Sinon n est impair et il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Comme $n \geqslant 2N_v + 1$, on a donc $k \geqslant N_v$ et donc $w_n = w_{2k+1} = v_k > A$. Dans tous les cas, on a bien montré que pour tout $n \geqslant N$, $w_n > A$.

Donc de nouveau $f(w)$ tend vers $\ell_w \in \mathbb{R}$. Mais $f(u)$, qui converge vers ℓ_u, est une sous suite de $f(w)$, donc converge vers ℓ_w. Par unicité de la limite, on a donc $\ell_u = \ell_w$. Par le même raisonnement, on déduit que $\ell_v = \ell_w$. Par conséquent $\ell_u = \ell_v$.

Méthode 2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|\ell_u - \ell_v| \leqslant |\ell_u - f(u_n) + f(u_n) - f(v_n) + f(v_n) - \ell_v| \leqslant |\ell_u - f(u_n)| + |f(u_n) - f(v_n)| + |f(v_n) - \ell_v|\,.$$
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(f(u_n))_n$ tend vers ℓ_v, il existe $N_u \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_u$, $|\ell_u - f(u_n)| < \varepsilon$. De même, il existe $N_v \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_u$, $|\ell_v - f(v_n)| < \varepsilon$. Enfin, puisque u et v tendent vers $+\infty$, on a par le même raisonnement que précédemment un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n > B_\varepsilon$ et $v_n > B_\varepsilon$ d'où $|f(u_n) - f(v_n)| < \varepsilon$. Ainsi, en prenant $n \geqslant \max(N_u, N_v, N)$, on en déduit que
$$|\ell_u - \ell_v| \leqslant 3\varepsilon\,.$$

Puisque l'inégalité est vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc $\ell_u = \ell_v$.

La limite de $f(u)$ est donc indépendante de la suite u. Notons ℓ cette limite. On a donc montré qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ telle que pour toute suite u tendant vers $+\infty$, on a $f(u)$ tend vers ℓ. Par la caractérisation séquentielle de la limite, on a donc f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en $+\infty$.

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction valant 1 sur $\mathbb{Q}$ et 0 sinon (f est dite fonction indicatrice des rationnels et se note $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$).

1. Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$. *Indication : on pourra étudier la continuité de f en $x \in \mathbb{R}$ en fonction de si $x \in \mathbb{Q}$ ou $x \notin \mathbb{Q}$.*

Correction.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit V un voisinage de x. Si $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ alors $V \cap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \neq \varnothing$ car contient x. Sinon $x \in \mathbb{Q}$ et la suite $\left(x + \frac{\sqrt{2}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ converge vers x, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x + \frac{\sqrt{2}}{N+1} \in V \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \varnothing$. D'où dans tous les cas $V \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \varnothing$ i.e. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons d'abord $x \notin \mathbb{Q}$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Pour tout $\eta > 0$, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $y \in]x-\eta, x+\eta[\cap \mathbb{Q}$ et $|f(y) - f(x)| = |1 - 0| = 1 \geqslant \varepsilon$. On vient d'écrire exactement la négation de la définition de la continuité en x. Donc f n'est pas continue en x.

   Si maintenant $x \in \mathbb{Q}$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Pour tout $\eta > 0$, par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $y \in]x-\eta, x+\eta[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ et $|f(y) - f(x)| = |0 - 1| = 1 \geqslant \varepsilon$. On vient d'écrire exactement la négation de la définition de la continuité en x. Donc f n'est pas continue en x.

   Dans tous les cas, f n'est donc pas continue en x. Donc f est continue nulle part sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15

1. Soit $f : x \mapsto E(\frac{1}{x})$. Donner l'ensemble de définition de f. Que vaut la limite à droite et à gauche de f en 0 ? Est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Soit $g : x \mapsto xE(\frac{1}{x})$. Donner l'ensemble de définition de g. Que vaut la limite à droite et à gauche de g en 0 ? Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.

Correction.

1. On a $D_f = \mathbb{R}^*$. La limite à droite de f en 0 est $+\infty$. En effet, soit $A > 1$, alors pour tout $0 < x < \frac{1}{E(A)+1}$, on a $\frac{1}{x} > E(A) + 1$ et donc par croissante de E, on obtient $f(x) \geqslant E(E(A) + 1) = E(A) + 1 > A$. Par la même méthode, on montre que la limite à gauche de f en 0 est $-\infty$.

   Si f était prolongeable par continuité en 0, alors f admettrait une limite finie en 0, donc en particulier des limites à gauche et à droite finies (et égales). Comme on vient de montrer que ce n'est pas le cas, on déduit que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.
2. On a $D_g = \mathbb{R}^*$. On a pour tout $x \neq 0$, $f(x) \leqslant \frac{1}{x} < f(x) + 1$. Ainsi pour $x > 0$, $g(x) \leqslant 1 < g(x) + x$. On déduit donc que la limite à droite de g en 0 est 1. Ensuite pour $x < 0$, $g(x) \geqslant 1 > g(x) + x$ et de même la limite à gauche de g en 0 est 1. Ainsi d'après l'Exercice 13, g est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 16

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Correction.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(x+k) = f(x)+k$. Ainsi si f est continue sur $[0, 1[$ alors f est continue sur $\mathbb{R}$. Prouvons ce résultat intermédiaire : supposons donc f continue sur $[0, 1[$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, alors il existe (un unique) $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $x_0 + k_0 \in [0, 1[$. Donc f est continue en $x_0 + k_0$ i.e. f admet une limite en $x_0 + k_0$. Donc $g : \tilde{x} \in \mathbb{R} \mapsto f(\tilde{x} + k_0) - k_0$ admet une limite en x_0. Or pour tout $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, $g(\tilde{x}) = f(\tilde{x})$. D'où f admet une limite en x_0, donc est continue en x_0.

Il suffit donc d'étudier la continuité de f en les éléments de $[0, 1[$. Soit $x_0 \in]0, 1[$. La fonction E est continue en x_0 (puisque constante dans un voisinage de x_0), donc par composée et somme de fonctions continues, f est continue en x_0.

Étudions maintenant la continuité de f en 0. Pour $x \in [0, \frac{1}{2}[$, on a $f(x) = \sqrt{x}$. Pour $x \in]\frac{1}{2}, 0[$, on a $f(x) = -1 + \sqrt{x+1}$. Ainsi f admet une limite à droite qui est 0. De même f admet aussi 0 comme limite à gauche. Donc f est continue en 0.

En conclusion f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 (Semi-continuité inférieure)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}$. On dira que f est semi-continue inférieurement en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[,\ f(x) > f(x_0) - \varepsilon.$$

1. Montrer que si f est continue en x_0 alors f est semi-continue inférieurement en x_0.
2. Est-ce que $\mathbb{1}_{]0,+\infty[}$ et $\mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ sont continues sur $\mathbb{R}$? Sont-elles semi-continues inférieurement sur $\mathbb{R}$?
3. a) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle minorée. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \inf_{k\geqslant n} u_k$. Justifier que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que soit elle tend vers $+\infty$, soit elle est convergente. Dans les deux cas on notera $\liminf\limits_{n\to+\infty} v_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sa limite.

   b) Montrer que f est semi-continue inférieurement en x_0 si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0, on a $\liminf\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \geqslant f(x_0)$.

Correction.

1. Il suffit d'écrire la définition de la continuité.
2. Elles sont continues sur $\mathbb{R}^*$ mais pas en 0 (regarder limite à droite et à gauche qui sont différentes). Elles sont donc s.c.i. sur $\mathbb{R}^*$. Regardons ce qui se passe en 0. Pour la première on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \geqslant \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(0) = 0$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) > \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(0) - \varepsilon$. D'où elle est s.c.i. en 0. Par contre la deuxième n'est pas s.c.i. en 0 car pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, et pour tout $x < 0$, $0 = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) < \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(0) - \varepsilon = \frac{1}{2}$. Donc la définition de la s.c.i en 0 n'est pas satisfaite.
3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{u_k : k \geqslant n\}$ est non vide et minorée donc par la propriété de la borne inférieure admet une borne inférieure. Donc w_n est bien défini.

   La suite w est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{u_k : k \geqslant n+1\} \subset \{u_k : k \geqslant n\}$. Donc si w est majorée, alors elle converge par le théorème de la limite monotone. Sinon elle tend vers $+\infty$.

   b) Supposons f s.c.i en x_0. Soit u une suite qui converge vers x_0. Soit $\varepsilon > 0$, alors par s.c.i. il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$. Par convergence de u, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, d'où $f(u_n) \geqslant f(x_0) - \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$, $f(x_0) - \varepsilon$ est un minorant de $\{f(u_k) : k \geqslant n\}$, donc cet ensemble admet une borne inférieure par la propriété de la borne inférieure, et $\inf_{k\geqslant n} f(u_k) \geqslant f(x_0) - \varepsilon$. D'après la précédente question on a $\liminf\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et par passage à la limite dans l'inégalité, on obtient $\liminf\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \geqslant f(x_0) - \varepsilon$. Comme cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on déduit $\liminf\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \geqslant f(x_0)$.

   Supposons que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0, on ait $\liminf\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \geqslant f(x_0)$. Si par l'absurde, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$ il existe $x \in]x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0[$ vérifiant $f(x) \leqslant f(x_0) - \varepsilon_0$, alors on peut construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0 et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) \leqslant f(x_0) - \varepsilon_0$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\inf_{k\geqslant n} f(u_k) \leqslant f(x_0) - \varepsilon_0$. Par passage à la limite, on obtient $\liminf\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \leqslant f(x_0) - \varepsilon < f(x_0)$. Absurde. Donc f est bien s.c.i en x_0.