Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 2ème année, Mathématiques et Applications, 2023-2024
ANALYSE 3

Feuille de TD n°5

Fonctions : limites et continuité.

Exercices complémentaires d'entraînement

1. Exercices corrigés : prise en main

Exercice 1 (Un peu de topologie)
Soit $A = \{\frac{1}{n+1} \,/\, n \in \mathbb{N}\}$. On a vu en TD que $0 \in \bar{A}$.

1. Déterminer $\bar{A}$.

2. A est-il fermé ?

Correction.
Rappel. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de x_0 s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset V$.
Rappel. Pour $A \subset \mathbb{R}$, on a

— $\ell \in \bar{A}$ si et seulement si pour tout V voisinage de ℓ, on a $V \cap A \neq 0$.

— $A \subset \bar{A}$ (conséquence directe de la définition précédente).

— A est fermé si et seulement si $A = \bar{A}$.

1. On a $A \subset \bar{A}$ et $0 \in \bar{A}$ donc $A \cup \{0\} \subset \bar{A}$. Montrons que $\bar{A} = A \cup \{0\}$. Il reste à montrer $\bar{A} \subset A \cup \{0\}$. On montre pour cela l'inclusion équivalente $(A \cup \{0\})^c \subset (\bar{A})^c$.

Soit $A, B \subset \mathbb{R}$. On a $A \subset B$ si etseulement si $B^c \subset A^c$. En effet, en utilisant une contraposée, on a :

$$A \subset B \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ x \in A \Rightarrow x \in B \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ x \notin B \Rightarrow x \notin A \quad \Longleftrightarrow \quad B^c \subset A^c$$

Soit $x \notin A \cup \{0\}$. Si $x > 1$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x - \varepsilon > 1$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1 < x - \varepsilon$, d'où $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap(A \cup \{0\}) = \varnothing$ i.e. $x \notin \bar{A}$. Si $x < 0$, le raisonnement est similaire. Sinon si $0 < x < 1$, alors pour $n = E\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{(n-1)+1}$. Ainsi il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\frac{1}{n+1} < x - \varepsilon < x < x + \varepsilon < \frac{1}{(n-1)+1}$ et donc $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap(A \cup \{0\}) = \varnothing$ i.e. $x \notin \bar{A}$. On a bien montré que $(A \cup \{0\})^c \subset (\bar{A})^c$ i.e. $\bar{A} \subset A \cup \{0\}$. D'où $A = A \cup \{0\}$.

2. On a $A \neq \bar{A}$, car $0 \in \bar{A}$ mais $0 \notin A$, donc A n'est pas fermé.

Exercice 2 (Encore un peu de topologie)

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ est un voisinage de x_0.

b) Soit $V \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, satisfaisant $x_0 \in]a, b[\subset V$. Montrer que V est un voisinage de x_0.

c) Soit $V \subset \mathbb{R}$ un voisinage de x_0. Soit $V' \subset \mathbb{R}$ tel que $V \subset V'$. Montrer que V' est un voisinage de x_0.

2. Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide.

a) Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A. On suppose A fermé. Montrer que si u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\ell \in A$.

b) En déduire que A est fermé si et seulement si pour toute suite convergente d'éléments de A converge dans A.

Correction.

1. Rappel. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de x_0 s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subset V$. Qualitativement, V est un voisinage de x_0 si V contient un intervalle ouvert centré en x_0.

a) Posons $V =]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$, on a $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subset V$, donc V est bien un voisinage de x_0 (puisque contient un intervalle ouvert centré en x_0).

b) On a $a < x < b$, donc par le lemme de réécriture, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a < x-\varepsilon < x < x+\varepsilon < b$ i.e. $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subset]a,b[$. Or $]a,b[\subset V$, donc $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subset V$. Par conséquent V est bien un voisinage de x_0.

c) Comme V est un voisinage de x_0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subset V$. Comme $V \subset V'$, on a aussi $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subset V'$. D'où V' est un voisinage de x_0.

2. Rappel. Pour $A \subset \mathbb{R}$, on a

— $\ell \in \bar{A}$ si et seulement si pour tout V voisinage de ℓ, on a $V \cap A \neq 0$.

— $A \subset \bar{A}$ (conséquence de la définition précédente).

— A est fermé si et seulement si $A = \bar{A}$.

a) Dire que u est une suite d'éléments de A, ou à valeurs dans A, c'est dire que $\{u_n \,/\, n \in \mathbb{N}\} \subset A$.

On suppose donc que u converge $\ell \in \mathbb{R}$. Montrons que $\ell \in \bar{A}$. Soit V un voisinage de ℓ, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\subset V$. Or comme u converge vers ℓ, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\subset V$. Ainsi $u_N \in V \cap A$ (car u est à valeurs dans A) donc $V \cap A \neq \varnothing$. Donc ℓ est bien adhérent à A.

On vient de montrer le fait général suivant : si une suite convergente est à valeurs dans un certain ensemble A, alors sa limite est nécessairement adhérente à A.

Or A est fermé, d'où $A = \bar{A}$, par conséquent $\ell \in A$.

b) On raisonne par double implication.

($\Rightarrow$) Cela a été montré dans la précédente question.

($\Leftarrow$) Soit $\ell \in \bar{A}$. Montrons que $\ell \in A$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors comme $V_n :=]\ell - 2^{-n}, \ell + 2^{-n}[$ est un voisinage de ℓ (d'après la question 1.a)) et $\ell \in \bar{A}$, il existe $u_n \in V \cap A$. On a construit ainsi une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell - 2^{-n} < u_n < \ell + 2^{-n}$. Par le théorème des gendarmes, u converge donc vers ℓ. Et par hypothèse, on a donc $\ell \in A$.

On a ainsi montré $\bar{A} \subset A$, et donc $A = \bar{A}$, i.e. A est fermé.

Cette propriété s'appelle *la caractérisation séquentielle des fermés.*

Exemple. Soit $A =]0,1]$ et $u = (\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Alors u est une suite de A, convergente vers 0 mais $0 \notin A$, donc A n'est pas fermé.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (-1)^{E(x)}$. Tracer l'allure du graphe de f et déterminer l'ensemble des points $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que f est localement bornée en x_0.

Correction.

f est bien définie car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(x) \in \mathbb{Z}$ donc $(-1)^{E(x)}$ est défini ($(-1)^{-1} = 1/(-1) = -1$).
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ si $E(x)$ est pair et $f(x) = -1$ si $E(x)$ est impair. f est donc constante par morceaux et vaut 1 sur les intervalles de la forme $[2k, 2k+1[$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et -1 sur les intervalles de la forme $[2k+1, 2k+2[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = 1$ donc f est bornée donc localement bornée. En effet, soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et V un voisinage de x_0, alors pour tout $x \in V$, $x \in \mathbb{R}$ donc $|f(x)| \leqslant 1$.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ si $x < 0$. Tracer l'allure du graphe de f et déterminer l'ensemble des points $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que f est localement bornée en x_0.

Correction.
Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = 1 + \frac{1}{|x|}$ (la fonction est impaire). Le graphe de f s'obtient en traçant celui de $x \mapsto \frac{1}{|x|}$ et en le translatant verticalement de $+1$. Graphe auquel on ajoute le point $(0, f(0)) = (0, 0)$.
Par définition, f est localement bornée en x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 et $M > 0$ tels que pour tout $x \in V$, $|f(x)| \leqslant M$.
Pour tout $x_0 \neq 0$, f est localement bornée en x_0 car continue en x_0. Montrons le néanmoins directement. En effet, si $x_0 > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\eta < x_0$ alors pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $|f(x)| \leqslant 1 + \frac{1}{|x|} \leqslant 1 + \frac{1}{|x_0 - \eta|}$ (car f est décroissante sur $V =]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$). Autrement dit, sur le voisinage V de x_0, f est bornée par $M = 1 + \frac{1}{|x_0 - \eta|}$. On raisonne de même si $x_0 < 0$ en considérant $\eta > 0$ tel que $\eta < -x_0$ et un majorant $M = 1 + \frac{1}{|x_0 + \eta|}$.
Montrons maintenant que f n'est pas localement bornée en 0. Soient V un voisinage de 0 et $M > 0$, montrons qu'il existe $x \in V$ tel que $|f(x)| > M$. Puisque V est un voisinage de 0, il existe $\eta > 0$ tel que $]-\eta, \eta[\subset V$ et pour tout $x \in]0, \frac{1}{M}[$, on a $f(x) > 1 + M > M$. Ainsi pour $x = \frac{1}{2}\min(\eta, \frac{1}{M})$, on a $x \in V$ et $|f(x)| > M$.

Exercice 5

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions localement bornées en 1. Montrer que $f + g$ est localement bornée en 1.

Correction.
Par hypothèse, il existe $M, M' > 0$ et il existe V et V' deux voisinages de 1 tels que f est bornée par M sur V et g est bornée par M' sur V'. Par définition d'un voisinage, il existe $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon' > 0$ tels que $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\subset V$ et $]1-\varepsilon', 1+\varepsilon'[\subset V'$. Posons $\varepsilon'' = \min(\varepsilon, \varepsilon')$ et $V'' =]1-\varepsilon'', 1+\varepsilon''[$. Alors $V'' \subset V \cap V'$ donc pour tout $x \in V''$, $x \in V$ d'où $|f(x)| \leqslant M$ et $x \in V'$ d'où $|g(x)| \leqslant M'$. Ainsi, pour tout $x \in V''$, $|f(x) + g(x)| \leqslant M + M'$. Autrement dit, $f + g$ est bornée par $M + M'$ sur V''.
On a plus généralement montré que l'intersection de deux voisinages d'un point est encore un voisinage de ce point.

Exercice 6 (Limites et monotonie)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Montrer que si f n'est pas majorée alors $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = +\infty$.

2. Montrer que si f est majorée alors f admet une limite finie à gauche en b valant $\sup(\{f(x) \,/\, x \in]a, b[\})$.

Correction.

1. Soit $A > 1$. Comme f n'est pas majorée, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) > A$. Comme f est croissante, on a donc pour tout $x \in]x_0, b[$, $f(x) \geqslant f(x_0) > A$. Posons $\eta = b - x_0 > 0$. Alors on vient de montrer que pour tout $x \in]b - \eta, b[$, on a $f(x) > A$. Cela signifie bien que $\lim\limits_{x \to b, x < b} f(x) = +\infty$.

2. Comme f est majorée, l'ensemble $F = \{f(x) \,/\, x \in]a, b[\} \subset \mathbb{R}$ est non vide et majorée donc il admet une borne supérieure d'après le théorème d'existence de la borne supérieure. On la note $S \in \mathbb{R}$.
   Soit $\varepsilon > 0$, d'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $S - \varepsilon < \underbrace{f(x_0)}_{\in F}$.
   Puisque f est croissante, on a donc pour tout $x > x_0$, $S - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant S < S + \varepsilon$. Posons $\eta = b - x_0 > 0$. Alors on vient de montrer que pour tout $x \in]b - \eta, b[$, on a $S - \varepsilon < f(x) < S + \varepsilon$, i.e. $\lim\limits_{x \to b, x < b} f(x) = S$.

Exercice 7

Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{x}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Correction.
Rappel : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues. De plus $\operatorname{sh}(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$, donc par stabilité par multiplication d'un équivalent, on a $\frac{\operatorname{sh}(x)}{x} \underset{x \to 0}{\sim} 1$, i.e. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. Ainsi f admet une

limite en $0 \in \overline{D_f}$, donc la fonction

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},$$

est continue en 0, donc sur tout $\mathbb{R}$ et prolonge f en 0.

Exercice 8 (Composition des limites)
Soient $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x\to-1} g(x) = -\infty$. Montrer, à partir des définitions, que $\lim_{x\to-\infty} g \circ f(x) = -\infty$.

Correction.
$f \circ g : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ est bien définie. Par définition, $\lim_{x\to-\infty} g \circ f(x) = -\infty$ si et seulement si

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-\infty, B[,\ g \circ f(x) < M.$$

Soit $M \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim_{y\to-1} g(y) = -\infty$ (et $D_g = \mathbb{R}$),

$$\exists \eta > 0,\ \forall y \in]-1-\eta, -1+\eta[,\ g(y) < M\,.$$

Or puisque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ (et $D_f = \mathbb{R}_-$),

$$\exists B \leqslant 0,\ \forall x \in]-\infty, B[,\ |f(x) - (-1)| < \eta\,.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-\infty, B[$, $f(x) \in]-1-\eta, -1+\eta[$ d'où

$$\forall x \in]-\infty, B[,\ g(f(x)) < M\,.$$

Exercice 9
Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que f et g sont continues en $x_0 \in D_f \cap D_g$. Montrer que $f + g$ est continue en x_0,

1. en utilisant la définition de la continuité,

2. en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité.

Correction.

1. Notons que $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en x_0, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$; autrement dit, il existe $\eta_f > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \eta_f, x_0 + \eta_f[\cap D_f,\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Puisque g est continue en x_0, il existe $\eta_g > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \eta_g, x_0 + \eta_g[\cap D_g,\ |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Posons $\eta = \min(\eta_f, \eta_g)$, alors pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_{f+g}$,

$$|f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)| \leqslant |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < 2\varepsilon\,.$$

Ainsi, la limite en x_0 de $f + g$ est bien $f(x_0) + g(x_0)$.

2. D'après la caractérisation séquentielle de la continuité, $f + g$ est continue en x_0 si pour toute suite $u = (u_n)$ telle que u tend vers x_0, la suite $(f(u_n) + g(u_n))$ tend vers $f(x_0) + g(x_0)$. Soit donc u une telle suite. Alors d'après cette caractérisation, puisque f est continue en x_0, $(f(u_n))$ tend vers $f(x_0)$. De même, $(g(u_n))$ tend vers $g(x_0)$. Par opération sur les suites, on déduit que $(f(u_n) + g(u_n))$ tend vers $f(x_0) + g(x_0)$.

Exercice 10

On souhaite démontrer dans cet exercice le théorème des gendarmes pour les fonctions dans un cas particulier grâce à deux méthodes différentes.

Soient f, g, h trois fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}_+$ telles que $f \leqslant g \leqslant h$ dans un voisinage de $+\infty$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$ grâce à la définition de la limite.
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$ en utilisant le théorème des gendarmes pour les suites.

Correction.

1. Comme $f \leqslant g \leqslant h$ dans un voisinage de $+\infty$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in]B, +\infty[$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, il existe $B_f > 0$ tel que pour tout $x \in]B_f, +\infty[$, $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$. De même comme $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$, il existe $B_h > 0$ tel que pour tout $x \in]B_h, +\infty[$, $\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$. Posons $B_g = \max(B, B_f, B_h) > 0$. Alors pour tout $x > B_g$, on a

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < \ell + \varepsilon.$$

On a donc bien que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$.

2. Pour se ramener au cas des suites, on va utiliser le critère séquentiel de la limite.

Pour rappel, dans le contexte qui nous intéresse ici, le critère séquentiel de la limite nous dit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $D_g = \mathbb{R}_+$ tendant vers $+\infty$, on a $(g(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ qui tend vers $+\infty$. Comme $f \leqslant g \leqslant h$ dans un voisinage de $+\infty$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in]B, +\infty[$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n > B$. Ainsi pour tout $n \geqslant N$, $f(u_n) \leqslant g(u_n) \leqslant h(u_n)$. Or par le critère séquentiel de la limite (appliqué à f et g), les suites $f(u) = (f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $h(u)$ convergent vers ℓ. Donc par le théorème des gendarmes (pour les suites), $g(u)$ convergent également vers ℓ. Finalement par le critère séquentiel de la limite appliqué à g, on obtient bien que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$.

Exercice 11

Soit f, g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Montrer de deux manières différentes, une fois par un raisonnement direct et une autre en retournant aux définitions, que $\max(f, g)$ est une fonction continue.

Correction.

Première méthode. Comme $\max(f, g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ et puisque la somme, la différence et la valeur absolue de fonctions continues sont continues, on déduit que $\max(f, g)$ est continue.

Deuxième méthode. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrons $\max(f, g)$ est continue en x_0 en retournant à la définition. Si $f(x_0) - g(x_0) > 0$ alors par continuité de f, g en x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $f(x) - g(x) > 0$ ainsi $f(x) > g(x)$ et $\max(f, g)(x) = f(x)$ (et $\max(f, g)(x_0) = f(x_0)$). La continuité est une propriété locale donc $\max(f, g)$ est continue en x_0 par continuité de f. Si $f(x_0) < g(x_0)$, alors le raisonnement est identique au précédent.

Il reste le cas $f(x_0) = g(x_0)$, i.e. $m = \max(f, g)(x_0) = f(x_0) = g(x_0)$. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[,\ m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon\,.$$

Par continuité de g en x_0, il existe $\eta' > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \eta', x_0 + \eta'[,\ m - \varepsilon < g(x) < m + \varepsilon\,.$$

Alors sur $V =]x_0 - \eta'', x_0 + \eta''[$ avec $\eta'' = \min(\eta, \eta')$,

$$m - \varepsilon < \max(f(x), g(x)) < m + \varepsilon.$$

i.e. $|\max(f, g)(x) - \max(f, g)(x_0)| < \varepsilon$. D'où de nouveau la continuité du max en x_0. C'est vrai pour tout x_0 donc $\max(f, g)$ continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12
Déterminer si la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin(x)\cos(x)}{|x|}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Correction.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues. Pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x\times 1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$. Pour tout $x < 0$, $f(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{-x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x\times 1}{-x} \underset{x\to 0}{\sim} -1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -1$. Les limites à gauche et à droite de f en 0 ne sont pas égales, donc f n'est pas prolongeable par continuité en 0. En effet supposons par l'absurde que f est prolongeable en une fonction $\tilde{f}$ continue en 0. Comme par définition pour tout $x \neq 0$, $\tilde{f}(x) = f(x)$, on a donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \tilde{f}(x) = f(0^-) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \tilde{f}(x) = f(0^+) = 1$. Mais comme $\tilde{f}$ est continue en 0, ses limites à gauche et à droite doivent être égales. Contradiction, d'où le résultat annoncé.

Exercice 13 (Vers une définition ensembliste de la continuité)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes.

(1) f est continue en x_0.

(2) pour tout $U \subset \mathbb{R}$ voisinage de $f(x_0)$, $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x_0.

On rappelle que dans ce contexte, f^{-1} représente l'application image réciproque de f.

Correction.
Considérons pour fixer les idées une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme dans l'énoncé. Pour rappel, par définition de l'application image réciproque de f [1], on a pour tout $U \subset \mathbb{R}$

$$f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \in U\}.$$

$f^{-1}(U)$ représente donc l'ensemble des antécédents par f des éléments de l'ensemble $U \subset \mathbb{R}$. $f^{-1}(U)$ est donc un sous ensemble de $\mathbb{R}$ (ou partie de $\mathbb{R}$). L'application ou fonction image réciproque de f est donc une fonction définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Il ne faut pas la confondre avec la fonction réciproque de f notée pourtant également f^{-1}. La fonction réciproque de f n'est définie que si f est bijective et elle est alors définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, bien que les notations soient les mêmes, le contexte d'utilisation de ces deux objets mathématiques distincts permet de les différencier. Si on écrit $f^{-1}(U)$ avec $U \subset \mathbb{R}$ (ce qui s'écrit également $U \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$), c'est que l'on considère ici la fonction image réciproque de f. Par contre si on écrit $f^{-1}(y)$ où $y \in \mathbb{R}$, c'est que l'on considère cette fois la fonction réciproque de f.

Pour terminer, voici comment ces deux objets sont reliés lorsque $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective :

$$\forall U \subset \mathbb{R}, \qquad \underbrace{f^{-1}}_{\text{application image réciproque de } f}(U) = \left\{ \underbrace{f^{-1}}_{\text{fonction réciproque de } f}(y) \,/\, y \in U \right\}.$$

($\Rightarrow$) Soit U un voisinage de $f(x_0)$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[\subset U$. Comme f est continue en x_0, on a par définition que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Ainsi il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, on a $f(x) \in]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ i.e. $x \in f^{-1}\left(]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[\right)$ (par définition de l'image réciproque).

On vient donc de montrer que tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, satisfait $x \in f^{-1}\left(]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[\right)$, i.e.

$$]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset f^{-1}\left(]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[\right).$$

Soit U_1, U_2 des sous ensembles de $\mathbb{R}$ tels que $U_1 \subset U_2$. Alors $f^{-1}(U_1) \subset f^{-1}(U_2)$. En effet, l'ensemble des antécédents par f des éléments de U_1 est bien inclus dans l'ensemble des antécédents par f des éléments de U_2 comme U_2 contient U.

Comme $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[\subset U$, on a donc $f^{-1}\left(]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[\right) \subset f^{-1}(U)$, d'où finalement

$$]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset f^{-1}(U).$$

Cette dernière inclusion correspond bien à dire que $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x_0.

1. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Image_réciproque`

($\Leftarrow$) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ est un voisinage de $f(x_0)$, on a donc par hypothèse que $f^{-1}\left(]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[\right)$ voisinage de x_0. Ainsi il existe $\eta > 0$ tel que $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset f^{-1}\left(]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[\right)$. Cela signifie que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, on a $f(x) \in \left(]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[\right)$ i.e. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. On vient bien de montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ i.e. f continue en x_0.