Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2023-2024
Analyse 3

Feuille de TD n°5

Fonctions : limites et continuité.

Exercices complémentaires d'entraînement

1. Exercices corrigés : prise en main

Exercice 1 (Un peu de topologie)
Soit $A = \{\frac{1}{n+1} \,/\, n \in \mathbb{N}\}$. On a vu en TD que $0 \in \bar{A}$.

1. Déterminer $\bar{A}$.

2. A est-il fermé ?

Exercice 2 (Encore un peu de topologie)

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ est un voisinage de x_0.

b) Soit $V \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, satisfaisant $x_0 \in]a, b[\subset V$. Montrer que V est un voisinage de x_0.

c) Soit $V \subset \mathbb{R}$ un voisinage de x_0. Soit $V' \subset \mathbb{R}$ tel que $V \subset V'$. Montrer que V' est un voisinage de x_0.

2. Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide.

a) Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A. On suppose A fermé. Montrer que si u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\ell \in A$.

b) En déduire que A est fermé si et seulement si pour toute suite convergente d'éléments de A converge dans A.

Exercice 3
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (-1)^{E(x)}$. Tracer l'allure du graphe de f et déterminer l'ensemble des points $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que f est localement bornée en x_0.

Exercice 4
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ si $x < 0$. Tracer l'allure du graphe de f et déterminer l'ensemble des points $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que f est localement bornée en x_0.

Exercice 5
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions localement bornées en 1. Montrer que $f + g$ est localement bornée en 1.

Exercice 6 (Limites et monotonie)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Montrer que si f n'est pas majorée alors $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = +\infty$.

2. Montrer que si f est majorée alors f admet une limite finie à gauche en b valant $\sup\left(\{f(x) \,/\, x \in]a, b[\}\right)$.

Exercice 7
Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{x}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 (Composition des limites)
Soient $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x \to -1} g(x) = -\infty$. Montrer, à partir des définitions, que $\lim_{x \to -\infty} g \circ f(x) = -\infty$.

Exercice 9
Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que f et g sont continues en $x_0 \in D_f \cap D_g$. Montrer que $f + g$ est continue en x_0,

1. en utilisant la définition de la continuité,
2. en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité.

2. Exercices corrigés : révisions et approfondissement

Exercice 10
On souhaite démontrer dans cet exercice le théorème des gendarmes pour les fonctions dans un cas particulier grâce à deux méthodes différentes.

Soient f, g, h trois fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}_+$ telles que $f \leqslant g \leqslant h$ dans un voisinage de $+\infty$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = \ell$.

1. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \ell$ grâce à la définition de la limite.
2. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \ell$ en utilisant le théorème des gendarmes pour les suites.

Exercice 11
Soit f, g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Montrer de deux manières différentes, une fois par un raisonnement direct et une autre en retournant aux définitions, que $\max(f, g)$ est une fonction continue.

Exercice 12
Déterminer si la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin(x)\cos(x)}{|x|}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 (Vers une définition ensembliste de la continuité)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes.

(1) f est continue en x_0.

(2) pour tout $U \subset \mathbb{R}$ voisinage de $f(x_0)$, $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x_0.

On rappelle que dans ce contexte, f^{-1} représente l'application image réciproque de f.