Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2023-2024
ANALYSE 3

Feuille de TD n°5

Fonctions : limites et continuité.

Exercice 1

Soit $A = \{\frac{1}{n+1} \,/\, n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $0 \in \bar{A}$.

Exercice 2

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $T \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est localement bornée en 0 alors $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x - T)$ est localement bornée en T.
2. Montrer que si il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(x_n)| > n$ alors f n'est pas localement bornée en 0.
3. Construire une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas localement bornée en 0.

Exercice 3 (Limites et monotonie)

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et tels que $a < b$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Montrer que si f n'est pas minorée alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$.
2. Montrer que si f est minorée alors f admet une limite finie à droite en a valant $\inf\{f(x) : x \in]a, b[\}$.

Exercice 4 (Cours : composition des limites)

Soient $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$. Montrer, à partir des définitions, que $\lim\limits_{x\to+\infty} g \circ f(x) = 1$.

Exercice 5

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) > 0$ et f continue en x_0. Montrer, en retournant à la définition de la continuité, qu'il existe un intervalle $I \subset]a, b[$ voisinage de x_0 tel que pour tout $x \in I$, $f(x) > 0$.

Exercice 6

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est positive sur $[a, b]$ et $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer alors que f est identiquement nulle.

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}$ avec $u_0 \in]0, 1]$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$.
3. Montrer que u est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x > B, \forall y > B, \; |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice 9 (Cours : caractérisation séquentielle de la continuité)

1. Rappeler et démontrer la caractérisation séquentielle de la continuité.

2. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ pour tout $x \neq 0$ et $f(x) = 0$ quand $x = 0$ est elle continue en 0 ?

Exercice 10 (Cours : stabilité de la notion de continuité)
Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que f et g sont continues en $x_0 \in D_f \cap D_g$.

1. Montrer alors que $f + g$ et fg sont continues en x_0.
2. On suppose de plus que $g(x_0) \neq 0$. Montrer alors que $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.

Exercice 11
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction valant 1 sur $\mathbb{Q}$ et 0 sinon (f est dite fonction indicatrice des rationnels et se note $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$).

1. Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$. *Indication : on pourra étudier la continuité de f en $x \in \mathbb{R}$ en fonction de si $x \in \mathbb{Q}$ ou $x \notin \mathbb{Q}$.*

Exercice 12 (Cours : continuité et limites à gauche et à droite)
Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $\cancel{x_0 \in \mathbb{R}}$ $x_0 \in D_f$. On suppose ~~qu'il existe $\eta > 0$ tel que~~ que pour tout $\eta > 0$, $]x_0 - \eta, x_0[\cap D_f \neq \varnothing$ et $]x_0, x_0 + \eta[\cap D_f \neq \varnothing$.

Démontrer que f est continue en x_0 si et seulement si $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$ existent et valent $f(x_0)$.

Exercice 13 (Cours : prolongement par continuité - nouvelle version)
Soit $a < c < b$ et $f :]a, b[\setminus\{c\} \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet des limites finies à droite et à gauche en c et que ces limites sont égales.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en c.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = x \sin(e^{\frac{1}{|x|}})$ et $g(0) = 1$. Justifier que g est continue sur $\mathbb{R}^*$. Justifier que g admet des limites à gauche et à droite en 0 qui sont égales. La fonction g est elle continue en 0 ?

Exercice 14
Dire si les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$.

1. $f : x \mapsto \sin(x)\sin(\frac{1}{x})$.
2. $g : x \mapsto \frac{1}{x}\ln(\frac{e^x + e^{-x}}{2})$.
3. $h : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$.

Exercice 15

1. Soit $f : x \mapsto E(\frac{1}{x})$. Donner l'ensemble de définition de f. Que vaut la limite à droite et à gauche de f en 0 ? Est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Soit $g : x \mapsto xE(\frac{1}{x})$. Donner l'ensemble de définition de g. Que vaut la limite à droite et à gauche de g en 0 ? Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 16
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 (Semi-continuité inférieure)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}$. On dira que f est semi-continue inférieurement en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[,\ f(x) > f(x_0) - \varepsilon.$$

1. Montrer que si f est continue en x_0 alors f est semi-continue inférieurement en x_0.
2. Est-ce que $\mathbb{1}_{]0,+\infty[}$ et $\mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ sont continues sur $\mathbb{R}$? Sont-elles semi-continues inférieurement sur $\mathbb{R}$?
3. a) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle minorée. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \inf_{k \geqslant n} u_k$. Justifier que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que soit elle tend vers $+\infty$, soit elle est convergente. Dans les deux cas on notera $\liminf\limits_{n\to+\infty} v_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sa limite.

b) Montrer que f est semi-continue inférieurement en x_0 si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0, on a $\liminf\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \geqslant f(x_0)$.