Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 2ème année, Mathématiques et Applications, 2024-2025
ANALYSE 3

Feuille de TD n°5

Fonctions : limites et continuité.

Exercice 1

1. Soit $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1} \,/\, n \in \mathbb{N} \right\}$. Montrer que 0 est adhérent à A. Montrer que $+\infty$ n'est pas adhérent à A.

2. Soit $B = \bigcup_{n=0}^{+\infty}]-n-\dfrac{1}{n+1}, -n[$. Représenter l'ensemble B. Montrer que $-\infty$ est adhérent à B.

Exercice 2

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $T \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est localement bornée en 0 alors $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x-T)$ est localement bornée en T.

2. Montrer que si il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(x_n)| > n$ alors f n'est pas localement bornée en 0.

3. Construire une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas localement bornée en 0.

Exercice 3 (Limites et monotonie)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ et $g :]-\infty, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes.

1. Montrer que si f n'est pas minorée alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

2. Montrer que si g n'est pas minorée alors $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = -\infty$.

3. Montrer que si f est minorée alors f admet une limite finie à droite en a valant $\inf(\{f(x) \,/\, x \in]a, b[\})$, notée également $\inf\limits_{x\in]a,b[} f(x)$.

Exercice 4 (Cours : composition des limites)

Soient $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$. Montrer, à partir des définitions, que $\lim\limits_{x\to+\infty} g \circ f(x) = 1$.

Exercice 5

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) > 0$ et f continue en x_0. Montrer, en retournant à la définition de la continuité, qu'il existe un intervalle $I \subset]a, b[$ voisinage de x_0 tel que pour tout $x \in I$, $f(x) > 0$.

Exercice 6

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est positive sur $[a, b]$ et $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer alors que f est identiquement nulle.

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}$ avec $u_0 \in]0, 1]$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$.

3. Montrer que u est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x > B, \forall y > B,\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice 9 (Cours : caractérisation séquentielle de la continuité)

1. Rappeler et démontrer la caractérisation séquentielle de la continuité.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ pour tout $x \neq 0$ et $f(x) = 0$ quand $x = 0$.
   a) Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D_f qui tend vers 0 et telle que la suite $f(u) = (f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.
   b) Déterminer si f est continue en 0.
   c) Montrer que pour tout $y \in [-1, 1]$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D_f qui tend vers 0 et telle que la suite $f(u)$ tend vers y.

Exercice 10 (Cours : stabilité de la notion de continuité)
Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que f et g sont continues en $x_0 \in D_f \cap D_g$.

1. Montrer alors que $f + g$ et fg sont continues en x_0.
2. On suppose de plus que $g(x_0) \neq 0$. Montrer alors que $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.

Exercice 11
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction valant 1 sur $\mathbb{Q}$ et 0 sinon (f est dite fonction indicatrice des rationnels et se note $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$).

1. Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$. *Indication : on pourra étudier la continuité de f en $x \in \mathbb{R}$ en fonction de si $x \in \mathbb{Q}$ ou $x \notin \mathbb{Q}$.*

Exercice 12 (Cours : continuité et limites à gauche et à droite)
Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$. On suppose que $x_0 \in \overline{]x_0 - 1, x_0[\cap D_f}$ et $x_0 \in \overline{]x_0, x_0 + 1[\cap D_f}$.
Démontrer que f est continue en x_0 si et seulement si $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$ existent et valent $f(x_0)$.

Exercice 13 (Cours : prolongement par continuité)
Soit $a < c < b$ et $f :]a, b[\setminus\{c\} \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet des limites finies à droite et à gauche en c et que ces limites sont égales.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en c.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = x\sin(e^{\frac{1}{|x|}})$ et $g(0) = 1$. Justifier que g est continue sur $\mathbb{R}^*$. Justifier que g admet des limites à gauche et à droite en 0 qui sont égales. La fonction g est elle continue en 0 ?

Exercice 14
Dire si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$.

1. $f : x \mapsto \sin(x)\sin(\frac{1}{x})$.
2. $g : x \mapsto \frac{1}{x}\ln(\frac{e^x+e^{-x}}{2})$.
3. $h : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$.

Exercice 15

1. Soit $f : x \mapsto E(\frac{1}{x})$. Donner l'ensemble de définition de f. Que vaut la limite à droite et à gauche de f en 0 ? Est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Soit $g : x \mapsto xE(\frac{1}{x})$. Donner l'ensemble de définition de g. Que vaut la limite à droite et à gauche de g en 0 ? Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 16
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.