Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 2ème année, Mathématiques et Applications
ANALYSE 3

Feuille de TD n°4

Suites réelles et complexes : suites extraites, suites de Cauchy. Rappels et compléments sur les séries.

Exercices complémentaires d'entraînement

1. Exercices corrigés : prise en main

Exercice 1

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \left(-\frac{n+2}{n}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donner deux valeurs d'adhérence de u.

Correction.

Par définition : ℓ est une valeur d'adhérence de u s'il existe une sous-suite de u qui converge vers ℓ. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n \left(\frac{n+2}{n}\right)^n = (-1)^n e^{n\ln(1+\frac{2}{n})}$. Or $n\ln(1+\frac{2}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{2}{n}$ donc $n\ln(1+\frac{2}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$. L'exponentielle étant continue, $e^{n\ln(1+\frac{2}{n})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^2$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$ de sorte que $u_n = (-1)^n v_n$ et en particulier, $u_{2n} = v_{2n}$ et $u_{2n+1} = -v_{2n+1}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n} = e^2$ car v tend vers e^2 et $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de v. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n+1} = e^2$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = e^2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -e^2$ d'où e^2 et $-e^2$ sont deux valeurs d'adhérence de u.

Exercice 2

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_n = i\arctan^2(-\ln(n^5+7))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que u possède au moins une valeur d'adhérence.

Correction.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\arctan(x)| \leqslant \frac{\pi}{2}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant (\frac{\pi}{2})^2$. La suite est bornée donc elle admet une valeur d'adhérence par le théorème de Bolzano-Weieirstrass.

Exercice 3

Soit φ une extractrice. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$.

Correction.

Par définition : une extractrice est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante.

> Méthode : pour montrer une propriété pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut raisonner par récurrence.

Montrons la propriété pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : comme $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on a $\varphi(0) \geqslant 0$.
Hérédité : supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$. Comme φ est strictement croissante, on a $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$. Donc $\varphi(n+1) \geqslant n+1$. Ceci termine la récurrence.

Exercice 4

1. Montrer que u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \sin\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$, diverge.

2. Montrer que u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{n\sin(3n+5)}{4n+1}$, admet une sous-suite convergente.

Correction.

1. La suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs. On raisonne selon la valeur de n modulo 3 (division euclidienne de n par 3). Posons $\varphi_0 : n \in \mathbb{N} \mapsto 3n$, $\varphi_1 : n \in \mathbb{N} \mapsto 3n+1$ et $\varphi_2 : n \in \mathbb{N} \mapsto 3n+2$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi_0(n)} = 0$, $u_{\varphi_1(n)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $u_{\varphi_2(n)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ces sous-suites sont constantes donc convergentes. La suite diverge car elle admet plusieurs valeurs d'adhérences.

2. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sin(3n+5)}{4}$ donc $u_n = \frac{\sin(3n+5)}{4} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geqslant N}$ une suite qui tend vers 0 tels que pour tout $n \geqslant N$, $u_n = \frac{\sin(3n+5)}{4} + \varepsilon_n$ d'où $|u_n| \leqslant \frac{1}{4} + |\varepsilon_n|$. Puisque ε est convergente, elle est bornée. Il existe donc $M > 0$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n| \leqslant \frac{1}{4} + M$. Alors u est bornée APCR donc bornée (par $\max\left(\frac{1}{4} + M, \max\{|u_n| \,/\, n < N\}\right)$). Ainsi, elle admet une sous-suite convergente d'après le théorème de Bolzano-Weieirstrass.

Exercice 5

On rappelle que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet l'intervalle $[-1,1]$ comme ensemble de valeurs d'adhérence. Soit u la suite définie par $u_n = |\cos(n)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de u.

Correction.

Par définition : ℓ est une valeur d'adhérence de u s'il existe une sous-suite de u qui converge vers ℓ.

On explicite l'énoncé en introduisant des variables pour faire parler entre elles les hypothèses :

Notons $v = (\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et soit $\ell \in [-1,1]$. Il existe alors une extractrice φ telle que v_φ converge vers ℓ, *i.e.* $\cos(\varphi(n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Alors, $u_{\varphi(n)} = |\cos(\varphi(n))| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell|$ par continuité de la fonction valeur absolue.

On vient donc de montrer que pour tout $\ell \in [-1,1]$, $|\ell|$ est une valeur d'adhérence de u. Autrement dit, en notant V l'ensemble des valeurs d'adhérence de u, on a montré que $[0,1] \subset V$.

Montrons que $V = [0,1]$. Il reste donc à montrer l'inclusion inverse. Soit $\ell' \in V$ une valeur d'adhérence de u, il existe ψ une extractrice telle que u_ψ converge vers ℓ', *i.e.* $|\cos(\psi(n))| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant |\cos(\psi(n))| \leqslant 1$ donc nécessairement $\ell' \in [0,1]$ par passage à la limite.

Exercice 6

Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n^3 = 1$.

1. Montrer que z admet une valeur d'adhérence.
2. On note $V \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de z.
   Déterminer toutes les valeurs pouvant appartenir à V.
3. On suppose que pour tout $\ell \in V$, $\mathfrak{Im}(\ell) > 0$. Montrer que z converge.

Correction.

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n|^3 = 1$ donc $|z_n| \leqslant 1$. La suite est majorée donc d'après le théorème de Bolzano-Weieirstrass, elle admet une valeur d'adhérence.

2. Par définition : ℓ est une valeur d'adhérence de z s'il existe une sous-suite de z qui converge vers ℓ.
   Soit $\ell \in V$ (ℓ existe car $V \neq \emptyset$). Il existe une extractrice φ telle que la sous-suite z_φ converge vers ℓ. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{\varphi(n)}^3 = 1$. Par continuité de l'élévation au cube, on a en passant à la limite, $\ell^3 = 1$ donc $\ell \in \{1, j, j^2\}$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
   Pour rappel, ce sont les racines cubiques de l'unité. Dans le plan complexe, elles forment un triangle équilatéral de sommets 1, j et $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \overline{j}$.
   Ainsi $V \subset \{1, j, j^2\}$. De plus, toute suite constante de valeur dans $\{1, j, j^2\}$ satisfait les hypothèses sur z. Chacune de ces trois valeurs peut donc être une valeur d'adhérence potentielle de z.

3. Si $\mathfrak{Im}(\ell) > 0$, alors par élimination, $\ell = j$ ($\mathfrak{Im}(j) = \sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathfrak{Im}(j^2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$).
   La suite est bornée et a une unique valeur d'adhérence, donc d'après le cours, elle converge.
   Attention, l'unicité de la valeur d'adhérence n'est pas suffisante. La suite $(n(1 + (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet que 0 pour valeur d'adhérence mais n'est pas convergente.

En bonus, donnons quelques exemples de suites z satisfaisant l'énoncé initial :

— pour tout $\ell \in V$, la suite constante égale à ℓ... (ne pas oublier les exemples les plus simples)

— la suite définie par $z_n = e^{\frac{2in\pi}{3}} = j^n$. On a $z_0 = 1, z_1 = j, z_2 = j^2, z_3 = j^3 = 1, \ldots$. Les termes de z tournent dans le sens trigonométriques sur les sommets du triangle équilatéral défini par $(1, j, j^2)$.

— la suite définie par $z_0 = j$ et la relation de récurrence $z_{n+1} = \overline{z_n}$. On a $z_{n+2} = \overline{\overline{z_n}} = z_n$ donc z prend deux valeurs associées aux sous-suites constantes données par $z_{2n} = j$ et $z_{2n} = \overline{j} = j^2$ (z oscille entre les deux sommets non réels du triangle équilatéral).

Exercice 7
Soient $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ deux suites telles que v est une sous-suite de u. On suppose que v admet k valeurs d'adhérence avec $k \in \mathbb{N}$. Montrer que u admet au moins k valeurs d'adhérence.

Correction.
On explicite l'énoncé :
Puisque v est une sous-suite de u, il existe φ une extractrice telle que $v = u_\varphi$. De plus, $\ell \in \mathbb{K}$ est une valeur d'adhérence de v s'il existe ψ une extractrice telle que v_ψ tend vers ℓ, *i.e.* $v_{\psi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
On combine ces assertions : Le cas échéant, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{\psi(n)} = u_{\varphi(\psi(n))}$ et donc $u_{\varphi\circ\psi}$ tend vers ℓ. Or $u_{\varphi\circ\psi}$ est une sous-suite de u donc ℓ est une valeur d'adhérence de u.
Finalement, on a montré que pour tout $\ell \in \mathbb{K}$, si ℓ est valeur d'adhérence de v alors ℓ est valeur d'adhérence de u. Donc u a au moins autant de valeurs propres que v.
u peut avoir plus de valeurs d'adhérence que v : par exemple, si u à $N > 1$ valeurs d'adhérence et v est convergente, alors v n'a qu'une valeur d'adhérence. Considérer par exemple $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = u_{2n}$.

Exercice 8
Soit u une suite réelle.

1. On suppose que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ'. Montrer que ℓ et ℓ' sont les deux seules valeurs d'adhérence de u.
2. En déduire les valeurs d'adhérence de la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n(1 + e^{-n})$.

Correction.
Le résultat de la question 1. généralise celui vu dans la feuille de TD concernant le fait que la suite $(\arctan((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $\pm\frac{\pi}{2}$ comme uniques valeurs d'adhérences. La forme de la preuve présentée ici diffère de celle vue dans la feuille de TD. Vous pouvez vous entraîner à reproduire la même rédaction.

1. Par l'absurde supposons qu'il existe $\ell'' \in \mathbb{R}$ une valeur d'adhérence de u distincte de ℓ, ℓ'.
   Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que
$$]\ell'' - \varepsilon_0, \ell'' + \varepsilon_0[\cap]\ell - \varepsilon_0, \ell + \varepsilon_0[= \varnothing \quad \text{et} \quad]\ell'' - \varepsilon_0, \ell'' + \varepsilon_0[\cap]\ell' - \varepsilon_0, \ell' + \varepsilon_0[= \varnothing.$$
Par convergence de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{2n} \in]\ell - \varepsilon_0, \ell + \varepsilon_0[$. Par convergence de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ', il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $u_{2n+1} \in]\ell' - \varepsilon_0, \ell' + \varepsilon_0[$.
   Comme ℓ'' est une valeur d'adhérence de u, il existe $k \geqslant \max(2n_0, 2n_1 + 1)$ tel que $u_k \in]\ell'' - \varepsilon_0, \ell'' + \varepsilon_0[$. Supposons que k soit pair, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2n$ et donc $k = 2n \geqslant 2n_0$ i.e. $n \geqslant n_0$. Par conséquent $u_k = u_{2n} \in]\ell - \varepsilon_0, \ell + \varepsilon_0[$. On a donc $u_k \in]\ell'' - \varepsilon_0, \ell'' + \varepsilon_0[\cap]\ell - \varepsilon_0, \ell + \varepsilon_0[= \varnothing$. C'est absurde.
   Sinon k est impair, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2n + 1$ et donc $k = 2n + 1 \geqslant 2n_1 + 1$ i.e. $n \geqslant n_1$. Par conséquent $u_k = u_{2n+1} \in]\ell' - \varepsilon_0, \ell' + \varepsilon_0[$. On a donc $u_k \in]\ell'' - \varepsilon_0, \ell'' + \varepsilon_0[\cap]\ell' - \varepsilon_0, \ell' + \varepsilon_0[= \varnothing$. C'est de nouveau absurde.
   On a obtenu une contradiction dans tous les cas, ainsi u n'admet pas d'autres valeurs d'adhérences que ℓ et ℓ'.
   Ce résultat est directement généralisable à toute famille finie de sous-suite $(u_{\varphi_k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, pourvu que les ensembles $\varphi_k(\mathbb{N})$ forment une partition de $\mathbb{N}$.
   Rappel / complément de théorie des ensembles. Soit E un ensemble et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous ensembles de E indexée par l'ensemble I. On dira que la famille $(E_i)_{i\in I}$ forme une partition de E et on notera cela symboliquement [1]
$$E = \bigsqcup_{i\in I} E_i,$$
si
   — la réunion des ensembles E_i, $i \in I$, vaut E, c'est-à-dire $E = \bigcup_{i\in I} E_i$,
   — les ensembles E_i, $i \in I$, sont deux à deux disjoints, c'est-à-dire pour tout $i, j \in I$, $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \varnothing$.
Par exemple pour $E = \mathbb{N}$, $I = \{0, 1\}$, $E_0 = \{2n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ et $E_1 = \{2n + 1 \,/\, n \in \mathbb{N}\}$, on a bien que la famille (E_0, E_1) forme une partition de E puisque on peut séparer l'ensemble des entiers naturels en deux sous ensembles disjoints : les entiers pairs et impairs.
   Exercice : formuler avec un énoncé précis la généralisation suggérée juste après la fin de la démonstration de cette question 1. Le démontrer en adaptant la preuve présentée dans ce corrigé.
   Quelques commentaires sur cette définition. [2] On a par définition pour tout $i \in I$, E_i est un sous ensemble de E, donc $E_i \subset E$. On dit aussi que E_i est une partie de E et on note cela $E_i \in \mathcal{P}(E)$. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$

1. l'usage du symbole $\bigsqcup$ à la place de $\bigcup$ permet de signifier que l'union est *disjointe*.
2. qui vous seront particulièrement utiles l'année prochaine si vous suivez le cours de *théorie de la mesure et intégration*.

est l'ensemble qui contient toutes les parties de E, c'est-à-dire tous les sous ensembles de E. Ainsi E_i en tant que sous ensemble de E (donc usage de la notation $\subset$ pour écrire $E_i \subset E$) peut être aussi vu comme un *élément* de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ (donc usage du symbole $\in$ pour écrire $E_i \in \mathcal{P}(E)$).

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 1 + e^{-2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $u_{2n+1} = -(1 + e^{-2n-1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$. Donc d'après la question 1., 1 et -1 sont les valeurs d'adhérence de u.

Exercice 9

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer qu'elle admet une sous-suite de termes soit tous positifs, soit tous négatifs.

<u>Correction</u>.
On a $\mathbb{N} = I_- \cup I_+$, avec $I_- = \{n \in \mathbb{N} \,/\, u_n \leqslant 0\}$ et $I_+ = \{n \in \mathbb{N} \,/\, u_n \geqslant 0\}$, puisque

— par définition $I_- \subset \mathbb{N}$ et $I_+ \subset \mathbb{N}$ donc $I_- \cup I_+ \subset \mathbb{N}$,

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a soit $u_n \leqslant 0$ et donc $n \in I_- \subset I_- \cup I_+$, soit $u_n \geqslant 0$ et donc $n \in I_+ \subset I_- \cup I_+$. D'où $\mathbb{N} \subset I_- \cup I_+$.

Comme $\mathbb{N}$ est infini, l'un (au moins) des ensembles I_- ou I_+ est également infini. Supposons que I_- est infini. Alors on sait qu'il existe φ une extractrice telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \in I_-$, i.e. $u_{\varphi(n)} \leqslant 0$. On a donc bien construit une sous suite de u à valeurs négatives. Si c'est I_+ qui est infini, alors par le même raisonnement, on construit une sous suite cette fois à valeurs positives. On a donc bien démontré dans tous les cas le résultat souhaité.

Exercice 10

Soient $c \in \mathbb{R}^*$ et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = c$.

1. Montrer à l'aide des résultats du cours que u n'est pas de Cauchy.
2. Montrer en revenant aux définitions que u n'est pas de Cauchy.

<u>Correction</u>.

1. Toute suite réelle de Cauchy converge. Or si u converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$ ce qui contredit $c \neq 0$.

2. Par définition, u est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geqslant N_\varepsilon,\ |u_p - u_q| < \varepsilon\,.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_{n+1} - u_n| = |c|$, on a pour $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$ l'existence de $N_c \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_c,\ |u_{n+1} - u_n| > \frac{|c|}{2}\,.$$

Ainsi pour tout $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, il existe $p, q \geqslant N_\varepsilon$ tel que $|u_p - u_q| \geqslant \varepsilon$. En effet, on peut considérer $p = \max(N_\varepsilon, N_c)$ et $q = p + 1$. Ceci montre que u n'est pas de Cauchy.

Exercice 11

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On suppose que les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers des scalaires a, b et c.

1. Montrer que $a = b = c$.
2. En déduire que u converge.

<u>Correction</u>.

1. Rassemblons les outils du cours pour montrer des égalités entre limites :

— définition de la limite,

— unicité de la limite,

— toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la limite de cette suite,

— opération sur les limites (mais aucune relation d'addition ou de multiplication ici),

— théorème des gendarmes et suites adjacentes (mais aucune information d'inégalités ici).

Pour exploiter le 3e item, nous allons construire des sous-suites communes à deux des suites de l'énoncé. Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ n'ont aucun terme en commun et pourraient converger vers des limites distinctes : c'est le cas pour $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. En revanche, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ ont en commun les termes de u d'indice multiple de 6. Et les suites $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ ont en commun les termes de u d'indice impair et multiple de 3 (3,9,15,...).
Posons $v = (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $t = (u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$.
La suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de v et une sous-suite de t. En effet, considérons les extractrices $\varphi : n \mapsto 2n$ et $\psi : n \mapsto 3n$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{\psi(n)} = u_{2\psi(n)} = u_{6n} \quad \text{et} \quad t_{\varphi(n)} = u_{3\varphi(n)} = u_{6n}$$

donc $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de v et une sous-suite de t. Or toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la limite de cette suite. Ainsi, $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a et c. Par unicité de la limite, $a = c$.

Construisons maintenant une sous-suite commune à w et t.

w_n	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	$\dots$
u_{2n+1}	u_1	u_3	u_5	u_7	u_9	u_{11}	u_{13}	u_{15}	$\dots$
u_{3n}	u_0	u_3	u_6	u_9	u_{12}	u_{15}	u_{18}	u_{21}	$\dots$
t_n	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	$\dots$

Pour extraire la sous-suite de termes communs à $t = (u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, il faut prendre un terme sur 2 en commençant par le 2e, à savoir les indices impairs de t.
Pour $w = (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, il faut prendre un terme sur 3 en commençant par le 2e, à savoir les termes w_{3n+1}.
Considérons maintenant les extractrices $\varphi : n \mapsto 2n+1$ et $\psi : n \mapsto 3n+1$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$t_{\varphi(n)} = u_{3\varphi(n)} = u_{3(2n+1)} = u_{6n+3} \quad \text{et} \quad w_{\psi(n)} = u_{2\psi(n)+1} = u_{2(3n+1)+1} = u_{6n+3}$$

donc $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de v et une sous-suite de w. Ainsi, $b = c$.

2. Notons $\ell = a = b$. Les images des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ contiennent tous les termes de u. Donc on va pouvoir encadrer ces termes à partir d'un certain rang dans un intervalle centré sur ℓ.
Soit $\varepsilon > 0$, puisque $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ, on a

$$\exists N_\varepsilon^v \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_\varepsilon^v, |u_{2n} - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \exists N_\varepsilon^w \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_\varepsilon^w, |u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$$

En posant $N = \max(N_\varepsilon^v, N_\varepsilon^w)$, on a alors

$$\forall n \geqslant N, |u_{2n} - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$$

Autrement dit, pour tout $k \geqslant 2N$, $|u_k - \ell| < \varepsilon$. Ainsi, u converge vers ℓ.
À partir du rang $2N$, les termes de u sont tous dans l'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.