Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 2$^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2023-2024
ANALYSE 3

Feuille de TD n°4

Suites réelles et complexes : suites extraites, suites de Cauchy. Rappels et compléments sur les séries.

Exercices complémentaires d'entraînement

1. Exercices corrigés : prise en main

Exercice 1
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \left(-\frac{n+2}{n}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donner deux valeurs d'adhérence de u.

Exercice 2
Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_n = i \arctan^2(-\ln(n^5+7))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que u possède au moins une valeur d'adhérence.

Exercice 3
Soit φ une extractrice. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$.

Exercice 4
1. Montrer que u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \sin(\frac{2n\pi}{3})$, diverge.
2. Montrer que u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{n\sin(3n+5)}{4n+1}$, admet une sous-suite convergente.

Exercice 5
On rappelle que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet l'intervalle $[-1,1]$ comme ensemble de valeurs d'adhérence. Soit u la suite définie par $u_n = |\cos(n)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de u.

Exercice 6
Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n^3 = 1$.
1. Montrer que z admet une valeur d'adhérence.
2. On note $V \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de z.
Déterminer toutes les valeurs pouvant appartenir à V.
3. On suppose que pour tout $\ell \in V$, $\mathfrak{Im}(\ell) > 0$. Montrer que z converge.

2. Exercices corrigés : révisions et approfondissement

Exercice 7
Soient $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ deux suites telles que v est une sous-suite de u. On suppose que v admet k valeurs d'adhérence avec $k \in \mathbb{N}$. Montrer que u admet au moins k valeurs d'adhérence.

Exercice 8
Soit u une suite réelle.
1. On suppose que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ'. Montrer que ℓ et ℓ' sont les deux seules valeurs d'adhérence de u.
2. En déduire les valeurs d'adhérence de la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n(1+e^{-n})$.

Exercice 9
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer qu'elle admet une sous-suite de termes soit tous positifs, soit tous négatifs.

Exercice 10
Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On suppose que les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers des scalaires a, b et c.
1. Montrer que $a = b = c$.
2. En déduire que u converge.