Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2023-2024
Analyse 3

Feuille de TD n°4

Suites réelles et complexes : suites extraites, suites de Cauchy. Rappels et compléments sur les séries.

Exercice 1
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u tend vers $+\infty$, resp. $-\infty$, alors toute suite extraite de u tend vers $+\infty$, resp. $-\infty$.

Exercice 2
Soient $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ deux suites convergentes. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = v_{2n+1}$. Montrer que u et v tendent vers la même limite.

Exercice 3
Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe φ une extractrice telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)} - \ell| < 2^{-n}$.

Exercice 4
Soit u une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(1) u ne converge pas vers ℓ,

(2) il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une extractrice φ, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \notin]\ell - \varepsilon_0, \ell + \varepsilon_0[$.

Exercice 5
1. Donner deux valeurs d'adhérences de la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \arctan((-1)^n n)$.
2. Montrer que ce sont les seules.

Exercice 6 (Cours)
Soit u une suite réelle, bornée et qui admet une unique valeur d'adhérence $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer qu'elle converge vers ℓ.

Exercice 7
Soit u une suite réelle.

1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer les propositions suivantes sont équivalentes.
   (a) ℓ est une valeur d'adhérence de u (admet une sous-suite qui converge vers ℓ),
   (b) Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \,/\, |u_n - \ell| < \varepsilon\}$ est infini,
   (c) Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
2. On suppose que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un intervalle.

Exercice 8
Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $u(\mathbb{N})$ soit un ensemble fini.

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est inclus dans $u(\mathbb{N})$.
2. a) Montrer que l'inclusion réciproque est fausse en général.
   b) Proposer une condition additionnelle sur u pour que cette réciproque devienne vraie.
   c) Application : soit u une suite N-périodique avec $N \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de u.

Séries numériques.

Exercice 9

On définit la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que les suites $v = (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $w = (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leqslant \ell \leqslant w_n$.

2. Montrer alors que u converge vers ℓ. Quel résultat sur les séries vient-on de redémontrer avec ce cas particulier ?

3. On considère la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $R_n = \ell - u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|R_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$. *Indication : on pourra utiliser l'inégalité de la question 1., et faire un dessin en représentant les quantités* $u_{2n}, u_{2n+1}, \ell, R_{2n}, u_{2n+1} - u_{2n}$.

Exercice 10 (Produit de Cauchy)

1. Soit u une suite réelle. Montrer que si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente.

2. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries. On définit le *produit de Cauchy* des deux séries précédentes, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ où $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{i+j=n} u_i v_j$.[1] Notons R, resp. S, resp. T, la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, resp. $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$, resp. $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$.

   a) Supposons que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont à termes positifs et convergentes. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leqslant R_n S_n \leqslant T_{2n}$. En déduire que $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ converge et que

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

   b) On suppose maintenant que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont absolument convergentes. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ converge. Que vaut la somme ? *Indication : on pourra considérer la différence* $|R_n S_n - T_n|$.

3. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^k}{k!}$ est absolument convergente. On admet que la limite vaut e^x.

   b) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Que vaut le produit de Cauchy de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^k}{k!}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{y^k}{k!}$? En appliquant les résultats précédents, retrouver une propriété bien connue de l'exponentielle.

1. On remarquera que le produit de Cauchy généralise aux séries le produit classique entre deux sommes.