Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2023-2024
Analyse 3

Feuille de TD n°3

Suites réelles et complexes : comportement asymptotique.

Exercice 1 (Cours : opérations sur les o)
Soient u, v, w trois suites réelles. Illustrer puis montrer les propriétés suivantes.

1. Transitivité des “o” : $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)\,,\ v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n) \Rightarrow u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$.
2. Stabilité des “o” par addition : $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)\,,\ w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \Rightarrow u_n + w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.
3. Stabilité des “o” par produit : $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \Rightarrow u_n w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n w_n)$.

Correction.
Pour ne pas exclure le cas où v peut s'annuler, on revient à la définition.
Par définition : $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $(\varepsilon_n)_{n\geqslant N}$ qui converge vers 0 tels que pour tout $n \geqslant N$, $u_n = \varepsilon_n v_n$.
Consigne du cours : quand la démonstration ne fait pas intervenir la notion APCR, on peut ne pas expliciter ce rang N.
Considérons pour tout l'exercice une telle suite ε.

1. Exemple : $\ln n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$ et $n = \underset{n\to+\infty}{o}(2^n)$ donc $\ln n = \underset{n\to+\infty}{o}(2^n)$.
On traduit les hypothèses : il existe $N' \in \mathbb{N}$ et $(\varepsilon'_n)_{n\geqslant N'}$ convergeant vers 0 tels que pour tout $n \geqslant N'$, $v_n = \varepsilon'_n w_n$.
On explicite l'objectif : montrer qu'il existe $N'' \in \mathbb{N}$ et $(\varepsilon''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 tels que pour tout $n \geqslant N''$, $u_n = \varepsilon''_n w_n$.
Alors en posant $N'' = \max(N, N')$, pour tout $n \geqslant N''$, $u_n = \varepsilon_n \varepsilon'_n w_n$ d'où le résultat en considérant la suite $\varepsilon'' = \varepsilon\varepsilon'$ bien définie pour $n \geqslant N''$ et tendant également vers 0.
2. Exemple : $2^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$ et $\ln n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$ donc $2^n + \ln n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$.
Il existe $N' \in \mathbb{N}$ et $(\varepsilon'_n)_{n\geqslant N'}$ convergeant vers 0 tels que pour tout $n \geqslant N'$, $w_n = \varepsilon'_n v_n$. Alors, on a pour tout $n \geqslant \max(N, N')$, $u_n + w_n = (\varepsilon_n + \varepsilon'_n)v_n$. La suite $\varepsilon'' = \varepsilon + \varepsilon'$ tend vers 0 donc $u_n + w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.
3. Exemple : $\ln n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$ donc $n \ln n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^2\right)$ et $\dfrac{\ln n}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou APCR), $u_n = \varepsilon_n v_n$ d'où $u_n w_n = \varepsilon_n v_n w_n$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc, $u_n w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n w_n)$.

Exercice 2 (Cours : quelques règles de calcul sur les équivalents)
Soient u, v, w, t quatre suites réelles. Illustrer puis montrer les propriétés suivantes.

1. Transitivité : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n,\ v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.
2. Passage à la puissance : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$. *On se placera dans le cas u suite strictement positive APCR.*
3. Produit terme à terme : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n,\ w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n \Rightarrow u_n w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n t_n$.

Correction.
Par définition : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ s'il existe $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou APCR), $u_n = \delta_n v_n$.
Considérons pour tout l'exercice une telle suite δ.

1. Exemple : $\sin\left(\dfrac{n+1}{n!}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n+1}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{n!} = \dfrac{1}{(n-1)!}$.
Puisque $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$, il existe $(\delta'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 et tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \delta'_n w_n$. Alors $\delta\delta'$ converge vers 1 or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \delta_n v_n = \delta_n \delta'_n w_n$.

2. Exemple : $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ donc $\dfrac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.
Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n = \delta_n v_n$.
Comme u est strictement positive APCR, il existe $N_u \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_u$, $u_n > 0$. La suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, donc pour $\varepsilon = 1$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $|\delta_n - 1| < 1$, d'où $\delta_n > 0$. Posons $N' = \max(N, N_u, N_1)$. Alors pour tout $n \geqslant N'$, on a $v_n > 0$ (v est également strictement positive APCR) donc u_n^α, v_n^α et δ_n^α sont bien définies (via la formule $a^b = e^{b\ln(a)}$) et on a $u_n^\alpha = \delta_n^\alpha v_n^\alpha$.

> Dans le cas où u n'est pas strictement positif APCR, il faut faire des hypothèses sur α.

Or par opération sur les limites (puissance fixée) $\delta_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$.

3. Exemple : $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ donc $(n+1)\cos(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\cos(n+1)$ (cas $w_n = t_n$).
Exemple : $(2n+1)(n+2) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n.n$.