Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2024-2025
ANALYSE 3

Feuille de TD n°3

Suites réelles et complexes : comportement asymptotique.

Exercices complémentaires d'entraînement

Exercice 1

Soient $a, b, q, r \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $0 < q < r$. Montrer que

$$n^a = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^b\right) \qquad \text{et} \qquad q^n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(r^n\right).$$

Correction.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n^a}{n^b} = n^{a-b}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, car $a - b < 0$, donc $n^a = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^b\right)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{q^n}{r^n} = \left(\frac{q}{r}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, car c'est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{q}{r} < 1$, donc $q^n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(r^n\right)$.

Exercice 2

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n = (-1)^n + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$. Montrer que u est bornée.

Correction.
Posons $v = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par hypothèse, il existe une suite $\varepsilon \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et telle que $u = v + \varepsilon$ (ou APCR). Ainsi, u est la somme de deux suites bornées donc elle est bornée. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|(-1)^n| \leqslant 1$ et la suite ε est convergente donc bornée.

Exercice 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. Montrer que

$$\frac{a}{b + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} = \frac{a}{b} + \underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

Correction.
D'après le cours, si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, on a

$$u_n = \ell + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} b + \underset{n\to+\infty}{o}(1) = b$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a}{b + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} = \frac{a}{b} \quad \text{d'où} \quad \frac{a}{b + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} = \frac{a}{b} + \underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

Exercice 4

Donner un équivalent simple des quantités suivantes

1. $u_n = (n-7)\ln(n^2+2)$
2. $u_n = \dfrac{n}{1 - \frac{1}{n}}$
3. $u_n = -7^n + 5n^{-3n} - n^3 + (2n)!$.
4. $u_n = 2n^4 - 3n^2 + (\ln(n))^9 - n^3(\ln(n))^2 + 0.9^n$.

Correction.

1. $n^2 + 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$ donc $\ln(n^2+2) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln(n)$ et $(n-7)\ln(n^2+2) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\ln(n)$.

2. $\frac{n}{1-\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ car $1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\frac{1}{1-\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ d'où le résultat par produit termes à termes.

3. D'après le cours $7^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$ et $n^3 = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$. Or, $n! = \underset{n\to+\infty}{o}((2n)!)$ car $\dfrac{n!}{(2n)!} = \dfrac{1}{\prod_{k=n+1}^{2n} k} \leqslant \dfrac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par transitivité, $7^n - n^3 = \underset{n\to+\infty}{o}((2n)!)$. De plus, $n^{-3n} = e^{-3n\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $n^{-3n} = \underset{n\to+\infty}{o}(1) = \underset{n\to+\infty}{o}((2n)!)$. Les 3 premiers termes sont négligeables face à $(2n)!$ donc $u_n = (2n)! + \underset{n\to+\infty}{o}((2n)!)$, *i.e.* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (2n)!$.

4. On a $3n^2 = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^4\right)$ car $\frac{3n^2}{n^4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et d'après le cours $\ln n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^{\frac{1}{9}}\right)$ donc par élévation à une puissance finie, $(\ln n)^9 = \underset{n\to+\infty}{o}(n) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^4\right)$, de même $(\ln n)^2 = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$ donc en multipliant par n^3, $n^3(\ln n)^2 = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^4\right)$. Enfin, $0.9 < 1$ donc $0.9^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $0.9^n = \underset{n\to+\infty}{o}(1) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^4\right)$. Ainsi, $u_n = 2n^4 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^4\right)$, *i.e.* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n^4$.

Exercice 5

Donner des équivalents simples des quantités suivantes.

1. $u_n = \dfrac{n-1}{3}\ln(n)^5 + (n+\sqrt{n+1}-7)^2$
2. $u_n = \cos\left(\dfrac{1}{n^n}\right) + \dfrac{1}{(n+3)^2}$
3. $u_n = \left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$
4. $u_n = (n-1)^n$
5. $u_n = \dfrac{(n-\pi)^n}{n^n + 10^n - (3n)!}$
6. $u_n = \dfrac{8 - 3n + \frac{1}{3^n} + \sqrt{n}\ln(n)^2}{-1 + \frac{n}{\ln(\ln(n^{2n}))}}$.

<u>Correction.</u>

1. $\frac{n-1}{3}\ln(n)^5 + (n+\sqrt{n+1}-7)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$. En effet, $n+\sqrt{n+1}-7 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ d'où $(n+\sqrt{n+1}-7)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$ d'où $(n+\sqrt{n+1}-7)^2 = n^2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^2\right)$. D'autre part, $\ln n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^{\frac{1}{5}}\right)$ donc par élévation à une puissance finie $\ln(n)^5 = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$ donc $\dfrac{n-1}{3}\ln(n)^5 = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^2\right)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}\dfrac{n-1}{3}\ln(n)^5 = 0$. D'où le résultat en sommant.

2. $\cos(\frac{1}{n^n}) + \frac{1}{(n+3)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(\frac{1}{n^n}) + \frac{1}{(n+3)^2} = \cos(0) + 0 = 1$ par continuité de la fonction cosinus.

3. $u_n = e^{n\ln(1+\frac{3}{n})}$. Or $\ln(1+\frac{3}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1+\dfrac{3}{n}) = 3$. La fonction exponentielle étant continue en 3, on peut composer et on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^3$. Ainsi, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^3$.

4. $(n-1)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} (n-1)^n$. On a $\frac{(n-1)^n}{n^n} = (1-\frac{1}{n})^n = e^{n\ln(1-\frac{1}{n})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}$ donc $(n-1)^n$ n'est pas équivalent à n^n.

5. $\dfrac{(n-\pi)^n}{n^n+10^n-(3n)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(n-\pi)^n}{n^n}$ car $10^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n^n)$ et $(3n)! = \underset{n\to+\infty}{o}(n^n)$ donc $n^n + 10^n - (3n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n$. De plus, $\frac{(n-\pi)^n}{n^n} = \left(1-\frac{\pi}{n}\right)^n = e^{n\ln(1-\frac{\pi}{n})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\pi}$. Ainsi, $\frac{(n-\pi)^n}{n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\pi}$ et on en déduit par transitivité que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\pi}$.

6. Au numérateur, $v_n \doteq 8 - 3n + \frac{1}{3^n} + \sqrt{n}\ln(n)^2 = -3n + \underset{n\to+\infty}{o}(n)$ donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -3n$. En effet, $\frac{1}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $8 + \frac{1}{3^n} = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$ et $\ln(n) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^{\frac{1}{4}}\right)$ donc par élévation à une puissance finie, $(\ln n)^2 = \underset{n\to+\infty}{o}(\sqrt{n})$ et en multipliant par $\sqrt{n}$, $\sqrt{n}\ln(n)^2 = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$.
Pour $n > 2$, notons w_n le dénominateur. On a

$$\begin{aligned} w_n = -1 + \frac{n}{\ln(\ln(n^{2n}))} &= -1 + \frac{n}{\ln(2n\ln(n))} = -1 + \frac{n}{\ln(2)+\ln(n)+\ln(\ln(n))} \\ &= -1 + \frac{n}{\ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(\ln(n))} = -1 + \frac{n}{\ln(n)} \cdot \frac{1}{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \\ &= -1 + \frac{n}{\ln(n)}(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)) = -1 + \frac{n}{\ln(n)} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{n}{\ln(n)}\right) \\ &= \frac{n}{\ln(n)} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{n}{\ln(n)}\right) \end{aligned}$$

En effet, $\dfrac{1}{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} = 1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} = 1$ et $-1 = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{n}{\ln(n)}\right)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\ln(n)} = +\infty$.
Ainsi, $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}$ et par opérations sur les équivalents, $u_n = \frac{v_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -3\ln n$.

Exercice 6

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \quad \Longleftrightarrow \quad au_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)\,.$$

Correction.
($\Rightarrow$) Puisque $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$, il existe $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou APCR), $u_n = \varepsilon_n v_n$ donc $au_n = a\varepsilon_n v_n$. Or la suite $(a\varepsilon_n)_n$ tend vers 0. Ceci montre que $au_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.
($\Leftarrow$) Puisque $au_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$, il existe $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou APCR), $au_n = \varepsilon_n v_n$ donc $u_n = \frac{1}{a}\varepsilon_n v_n$ car $a \neq 0$. Or la suite $(\frac{1}{a}\varepsilon_n)_n$ tend vers 0. Ceci montre que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.
Exemple d'application : $\ln n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$ donc $\ln(n^2) = 2\ln n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$.

Exercice 7

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

1. Montrer que $(-1)^n u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

2. Montrer que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(|v_n|)$.

Correction.
Par définition, il existe $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou APCR), $u_n = \varepsilon_n v_n$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou APCR), $u_n = \varepsilon_n v_n$ donc $(-1)^n u_n = (-1)^n \varepsilon_n v_n$. Or la suite $((-1)^n \varepsilon_n)_n$ tend vers 0 car sa valeur absolue tend vers 0. Ceci montre que $(-1)^n u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a nécessairement $|v_n| = v_n$ ou $|v_n| = -v_n$; posons $s_n = 1$ si $v_n \geqslant 0$ et $s_n = -1$ si $v_n < 0$ alors $|v_n| = s_n v_n$ d'où $u_n = \varepsilon_n s_n |v_n|$ (ou APCR). De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} |s_n \varepsilon_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ donc la suite $(s_n\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Ceci montre que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(|v_n|)$.

Exercice 8

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites strictement positives et équivalentes. On modifie la suite v en fixant à 0 un nombre fini de ses termes et on note w la suite obtenue. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.

Correction.
Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et une suite $(\delta_n)_{n\geqslant N}$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 1$ et pour tout $n \geqslant N$, $u_n = \delta_n v_n$.
Considérons l'ensemble des indices pour lesquels la suite w s'annule : $A = \{n \,/\, n \in \mathbb{N}, w_n = 0\} = \{n \,/\, n \in \mathbb{N}, w_n \neq v_n\}$.
Cet ensemble étant fini, il admet un maximum. Notons $N_0 = \max(A) + 1$. Alors pour tout $n \geqslant N_0$, $w_n = v_n$. Notons enfin $N_1 = \max(N, N_0)$, alors pour tout $n \geqslant N_1$, $u_n = \delta_n v_n = \delta_n w_n$. Ainsi, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.