

Licence 2^{ème} année, Mathématiques et Applications, 2024-2025
ANALYSE 3

Feuille de TD n°3

Suites réelles et complexes : comportement asymptotique.
Exercices complémentaires d'entraînement

Exercice 1

Soient $a, b, q, r \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $0 < q < r$. Montrer que

$$n^a = o_{n \rightarrow +\infty}(n^b) \quad \text{et} \quad q^n = o_{n \rightarrow +\infty}(r^n).$$

Exercice 2

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n = (-1)^n + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$. Montrer que u est bornée.

Exercice 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. Montrer que

$$\frac{a}{b + o_{n \rightarrow +\infty}(1)} = \frac{a}{b} + o_{n \rightarrow +\infty}(1).$$

Exercice 4

Donner un équivalent simple des quantités suivantes

1. $u_n = (n - 7) \ln(n^2 + 2)$

3. $u_n = -7^n + 5n^{-3n} - n^3 + (2n)!$

2. $u_n = \frac{n}{1 - \frac{1}{n}}$

4. $u_n = 2n^4 - 3n^2 + (\ln(n))^9 - n^3(\ln(n))^2 + 0.9^n$.

Exercice 5

Donner des équivalents simples des quantités suivantes.

1. $u_n = \frac{n-1}{3} \ln(n)^5 + (n + \sqrt{n+1} - 7)^2$

4. $u_n = (n-1)^n$

2. $u_n = \cos\left(\frac{1}{n^n}\right) + \frac{1}{(n+3)^2}$

5. $u_n = \frac{(n-\pi)^n}{n^n + 10^n - (3n)!}$

3. $u_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$

6. $u_n = \frac{8 - 3n + \frac{1}{3^n} + \sqrt{n} \ln(n)^2}{-1 + \frac{n}{\ln(\ln(n^{2n}))}}$.

Exercice 6

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que

$$u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \quad \iff \quad au_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n).$$

Exercice 7

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

1. Montrer que $(-1)^n u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

2. Montrer que $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(|v_n|)$.

Exercice 8

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites strictement positives et équivalentes. On modifie la suite v en fixant à 0 un nombre fini de ses termes et on note w la suite obtenue. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$.