Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2024-2025
Analyse 3

Feuille de TD n°3

Suites réelles et complexes : comportement asymptotique.

Exercice 1 (Cours : opérations sur les o)
Soient u, v, w trois suites réelles. Illustrer puis montrer les propriétés suivantes.
1. Transitivité des “o” : $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$, $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n) \Rightarrow u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$.
2. Stabilité des “o” par addition : $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$, $w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \Rightarrow u_n + w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.
3. Stabilité des “o” par produit : $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \Rightarrow u_n w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n w_n)$.

Exercice 2 (Cours : quelques règles de calcul sur les équivalents)
Soient u, v, w, t quatre suites réelles. Illustrer puis montrer les propriétés suivantes.
1. Transitivité : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.
2. Passage à la puissance : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$. *On se placera dans le cas u suite strictement positive APCR.*
3. Produit terme à terme : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n \Rightarrow u_n w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n t_n$.

Exercice 3
Donner des équivalents simples des quantités suivantes.

1. $u_n = ((n+1)!)\cos(n+1)$
2. $u_n = \ln\left(\dfrac{n!-1}{n!}\right) - \dfrac{1}{(2n)!}$
3. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^{n+1}}\right) + e^{-n}$
4. $u_n = \tan\left(\dfrac{1}{n^{n+1}}\right) - \dfrac{1}{n^n}$
5. $u_n = \left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right)^{n^2}$
6. $u_n = n^2 e^{\frac{n}{2}} + (n-1)^3 e^{\frac{n}{3}}$

Exercice 4 (Développement asymptotique de la série harmonique)
Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ la somme partielle de la série harmonique.
1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
   a) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_{n+1} - a_n)$ converge. *On dit que la nature d'une suite est la même que sa série des différences.*
   b) Montrer que la suite $a = \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{n>0}$ converge mais que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_{n+1} - a_n)$ est absolument divergente. Est-ce en contradiction avec l'équivalence précédente ?
2. a) Montrer que la suite $(H_n - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note γ cette limite. *C'est la constante d'Euler-Mascheroni.*
   b) En déduire que $H_n = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$. *On dit que c'est un développement asymptotique.*
3. a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\min\{k \in \mathbb{N}^* : H_k > n\}$ est bien défini. On note cet élément $r_n \in \mathbb{N}^*$. Que valent r_1, r_2 ?
   b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n \geqslant 2$.
   c) Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et donner sa limite. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde.*
   d) Donner un équivalent de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En déduire que
$$\frac{r_{n+1}}{r_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e.$$