Licence 2ème année, Mathématiques et Applications, 2024-2025
Analyse 3

Feuille de TD n°2

Suites réelles et complexes : convergence, limites et inégalités.

Exercice 2

Soient $\varepsilon > 0$ et $M \in \mathbb{R}$. Déterminer dans chacun des cas suivants le plus petit rang à partir duquel la propriété énoncée est vraie ou le plus grand rang jusqu'au quel la propriété énoncée est vraie.

1. $|u_n| < \varepsilon$, avec $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.
2. $|u_n - \frac{\pi}{2}| < \varepsilon$, avec $u_n = \arctan n$.
3. $u_n \geqslant 0$, avec $u_n = \cos(\frac{M}{n})$.

Correction.
Pour chacune de ces propriétés, on recherche le plus petit entier naturel à partir duquel la propriété est vraie. On le note N.

1.

2. u_n est défini pour $n \in \mathbb{N}$ car arctan est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - \frac{\pi}{2}| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \arctan n < \varepsilon \Leftrightarrow \arctan n > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$.
Si $\varepsilon > \frac{\pi}{2}$, l'inégalité est satisfaite pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas on pose donc $N = 0$.
Si $\varepsilon \leqslant \frac{\pi}{2}$, alors $0 \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ et par stricte croissance de tan, on obtient $\arctan n > \frac{\pi}{2} - \varepsilon \Leftrightarrow n > \tan(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)$. Alors on pose $N = E(\tan(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)) + 1$.
Dans tous les cas, on a pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \frac{\pi}{2}| < \varepsilon$.

3. — Supposons dans un premier temps que $M > 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors dès que $\frac{M}{n} \leqslant \frac{\pi}{2}$, on a $u_n \geqslant 0$ car cos est positif sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Or $\frac{M}{n} \leqslant \frac{\pi}{2}$ est équivalent à $n \geqslant \frac{2M}{\pi}$. Si $\frac{2M}{\pi}$ est un entier, alors on pose $N = \frac{2M}{\pi}$, sinon on pose $N = E\left(\frac{2M}{\pi}\right) + 1$. Dans tous les cas on a donc $n \geqslant \frac{2M}{\pi}$ si et seulement si $n \geqslant N$, et donc N est le plus petit entier naturel non nul n à partir duquel <u>la propriété $n \geqslant \frac{2M}{\pi}$</u> est toujours vraie.
On a donc montré que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant 0$. Mais est-ce que N est le plus petit entier naturel non nul n à partir duquel <u>la propriété $u_n \geqslant 0$</u> est toujours vraie ? Cela ne serait pas être le cas si $N \geqslant 2$[1] et par exemple $\frac{M}{N-1} \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$, comme cos est également positif sur $[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$, ou encore $\frac{M}{N-1} \in [\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}]$. Dans ces éventualités où $u_{N-1} \geqslant 0$, on a toujours $\frac{M}{N-1} \geqslant \frac{3\pi}{2}$. On va montrer que cette situation est impossible.
Supposons que la valeur de $M > 0$ est tel que $N \geqslant 2$. Prouvons alors qu'il est impossible que $\frac{M}{N-1} \geqslant \frac{3\pi}{2}$. Par l'absurde si c'est vrai, alors :

$$\frac{M}{N-1} - \frac{M}{N} \geqslant \pi \;\Leftrightarrow\; M \geqslant \pi N(N-1) \underbrace{\Rightarrow}_{\frac{M}{N} \leqslant \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow N \geqslant \frac{2M}{\pi}} M \geqslant \pi N(N-1) \geqslant \pi \frac{2M}{\pi}(N-1) = 2M(N-1),$$

d'où en simplifiant par $M > 0$, on obtient $\frac{3}{2} \geqslant N$. C'est en contradiction avec $N \geqslant 2$. Ainsi dès que $N \geqslant 2$, il est impossible d'avoir $\frac{M}{N-1} \geqslant \frac{3\pi}{2}$, ainsi $\frac{M}{N-1} < \frac{3\pi}{2}$. Et comme N est le plus petit entier naturel non nul n tel que $\frac{M}{n} \leqslant \frac{\pi}{2}$, on a finalement $\frac{M}{N-1} \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ i.e. $u_{N-1} < 0$. Ainsi lorsque $N \geqslant 2$, N est bien le plus petit entier naturel non nul n à partir duquel la propriété $u_n \geqslant 0$ est toujours satisfaite.
Si $N < 2$, alors $N = 1$ et N est automatiquement le plus petit entier naturel non nul n à partir duquel la propriété $u_n \geqslant 0$ est toujours vraie.
Bilan : $N = \frac{2M}{\pi}$ si $\frac{2M}{\pi}$ est un entier naturel ou sinon $N = E\left(\frac{2M}{\pi}\right) + 1$ est le plus petit entier naturel non nul n à partir duquel la propriété $u_n \geqslant 0$ est toujours vraie.

— Si $M = 0$, alors $N = 1$: la propriété $u_n \geqslant 0$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. on prend la précaution de supposer $N \geqslant 2$ car on divise par $N - 1$... Notez que si $N < 2$ alors $N = 1$ et on est certain dans ce cas d'avoir le plus petit N.

— Si $M < 0$, alors pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \cos\left(\frac{M}{n}\right)$ si et seulement si $u_n = \cos\left(\frac{-M}{n}\right)$, par parité de cos. Comme $-M > 0$, on déduit de ce qui précède que $N = \frac{-2M}{\pi}$ si $\frac{-2M}{\pi}$ est un entier naturel ou sinon $N = E\left(\frac{-2M}{\pi}\right) + 1$ est le plus petit entier naturel n à partir duquel la propriété $u_n \geqslant 0$ est toujours vraie.