Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 2ème année, Mathématiques et Applications, 2023-2024
Analyse 3

Feuille de TD n°2

Suites réelles et complexes : convergence, limites et inégalités.

Exercice 8 (Cours : opérations sur les suites divergentes)
Soit u et v deux suites réelles.

1. Montrer que si u converge vers $\ell > 0$ et v tend vers $+\infty$, alors le produit uv tend vers $+\infty$.
2. Si u tend vers $+\infty$ et v tend vers $-\infty$, alors uv tend vers $-\infty$.
3. Si u converge vers ℓ et si v tend vers $+\infty$, alors la suite des quotients $\frac{u}{v} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bien définie à partir d'un certain rang et est une suite convergente, de limite 0.
4. Soit u et v deux suites réelles. Si u est minorée et si v tend vers $+\infty$, alors $u+v$ tend vers $+\infty$. En particulier, si u est convergente et si v tend vers $+\infty$, alors $u+v$ tend vers $+\infty$.

Correction.
Rappel : on dit que u tend vers $+\infty$ si

$$\forall M > 0,\ \exists N_M \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_M,\ u_n > M. \tag{1}$$

Il est important de garder en mémoire que le "$\forall M > 0$" peut se réécrire de manière équivalente "$\forall M > 1$", ou "$\forall M > a$", avec n'importe qu'elle constante $a \in \mathbb{R}$ préalablement choisie ou même "$\forall M \in \mathbb{R}$". Dit autrement, on peut montrer que toutes ces assertions en remplaçant comme proposé le "$\forall M > 0$", peuvent être montrées comme équivalentes. En fonction du contexte, on peut donc être amené à choisir une formulation plutôt qu'une autre, même si dans la très grande majorité des cas c'est (1) qui est utilisée. Ce qui compte dans cette définition, c'est que M est autorisé à prendre des valeurs arbitrairement grandes.

1. On veut prouver que uv satisfait la définition

$$\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n v_n > M.$$

Il faut donc chercher à minorer les quantités u_n et v_n. Comme u converge, on a APCR $u_n > \frac{\ell}{2}$, donc APCR $u_n v_n > \frac{\ell}{2} v_n > \frac{\ell}{2}\frac{2M}{\ell} = M$ en imposant $v_n > \frac{2M}{\ell}$ grâce à v tend vers $+\infty$. Mettons rigoureusement ce raisonnement en place

Soit $M > 0$. Comme u converge vers ℓ, il existe $N_u \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_u$, $\ell - \frac{\ell}{2} < u_n < \ell + \frac{\ell}{2}$ (on a considéré $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$) d'où $u_n > \frac{\ell}{2}$. Comme v tend vers $+\infty$, il existe $N_v \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_v$, $v_n > \frac{2M}{\ell}$. Donc pour tout $n \geqslant N = \max(N_u, N_v)$, on a $u_n v_n > \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2M}{\ell} = M$. Ainsi uv tend vers $+\infty$.

2. On veut prouver que uv satisfait la définition

$$\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n v_n < -M.$$

Comme u tend vers $-\infty$, on peut le majorer APCR par -1, et comme v tend vers $+\infty$, on peut le minorer APCR par M. On obtient donc APCR $u_n v_n < (-1) \cdot v_n < -M$. Il faut être vigilant aux signes des quantités impliquées et à leur impact sur les inégalités.

Soit $M > 0$. Comme u tend vers $-\infty$, il existe $N_u \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_u$, $u_n < -1$. Puis comme v tend vers $+\infty$, il existe $N_v \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_v$, $v_n > M$. Ainsi pour tout $n \geqslant \max(N_u, N_v)$, en multipliant par $v_n > M > 0$ l'inégalité $u_n < -1$, on obtient $u_n v_n < -M$. D'où uv tend vers $-\infty$.

3. Comme v tend vers $+\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $v_n > 0$. Donc la suite $\frac{u}{v}$ est bien définie à partir du rang N. Notons que ce rang N n'est pas forcément optimal : il est possible qu'il existe un rang plus petit que N à partir duquel la suite quotient $\frac{u}{v}$ est bien définie. Nous avons juste montré qu'un rang existe sans chercher à définir le plus petit. La suite $\frac{u}{v}$ est donc bien définie sauf éventuellement pour un nombre fini d'entiers naturels. On peut donc discuter légitimement dans ce qui suit de la limite de cette suite en $+\infty$ puisque cela n'impose des contraintes sur la suite qu'à partir d'un certain rang (asymptotiquement).

Puisque u est convergente, u est bornée. Pour obtenir que $\frac{u}{v}$ tend vers 0, il suffit donc de montrer que $\frac{1}{v}$ tend vers 0, car le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle est une suite de limite nulle.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme v tend vers $+\infty$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, $v_n > \frac{1}{\varepsilon}$ d'où $\frac{1}{v_n} < \varepsilon$. On déduit aussi que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, on a $v_n > 0$, et donc $\frac{1}{v_n} > 0$. Par conséquent, on a montré que

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad -\varepsilon < 0 < \frac{1}{v_n} < \varepsilon,$$

i.e. $\frac{1}{v}$ converge vers 0. Finalement, on a donc bien que $\frac{u}{v}$ tend vers 0.

4. u est minorée donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$ pour un certain $m \in \mathbb{R}$. On veut montrer $u+v$ tend vers $+\infty$, donc pour $M \in \mathbb{R}$, obtenir APCR $u_n + v_n > M$. Mais pour tout n, $u_n + v_n \geqslant m + v_n$. Il suffit donc d'écrire APCR que $v_n > M - m$.

Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme u est minorée, il existe $m \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$. Puisque v tend vers $+\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on a $v_n > M - m$. Donc pour tout $n \geqslant N$, $u_n + v_n \geqslant m + v_n > m + M - m = M$. Ainsi $u + v$ tend vers $+\infty$.

Notez que nous avons utilisé ici dans l'assertion définissant le fait de tendre vers $+\infty$ le quantificateur "$\forall M \in \mathbb{R}$", au lieu de "$\forall M > 0$" comme dans les précédentes questions. Si on avait choisi $M > 0$, alors possiblement $M - m < 0$ ce qui pose des soucis de cohérences. Le "$\forall M \in \mathbb{R}$" permet de lever tous ces problèmes.

Exercice 10 (Cours : caractérisation séquentielle de la borne supérieure)
Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$.

1. Montrer l'équivalence entre
   (1) $S = \sup(A)$.
   (2) a) S est un majorant de A,
   b) il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers S.
2. Application. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction majorée. Montrer qu'il existe une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$. Donner un exemple d'une fonction f et d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente mais satisfaisants l'assertion précédente.

Correction.

1. Raisonnons par double implication.

($\Rightarrow$) Soit $n \in \mathbb{N}$ et posons $\varepsilon = \frac{1}{n+1} > 0$. Alors d'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe $a_n \in A$ (d'après l'énoncé de la caractérisation, l'élément de A dépend de ε donc ici de n) tel que $S - \frac{1}{n+1} < a_n \leqslant S$. On a donc construit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers S par le théorème des gendarmes.

($\Leftarrow$) Méthode 1 : Montrons que $S = \sup(A)$ grâce à la caractérisation de la borne supérieure.

On sait déjà grâce à (2)a) que S est un majorant de A. Soit $\varepsilon > 0$. D'après (2)b), il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A convergeant vers S. Par définition de la limite, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, $|a_n - S| < \varepsilon$, i.e. $S - \varepsilon < a_n < S + \varepsilon$. D'où $S - \varepsilon < a_{N_\varepsilon}$ avec $a_{N_\varepsilon} \in A$. D'après la caractérisation de la borne supérieure, on a bien $S = \sup(A)$.

Méthode 2. Si jamais $S > \sup(A)$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\sup(A) < S - \varepsilon$. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers S, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, $a_n - S > -\varepsilon$, c'est-à-dire $a_n > S - \varepsilon > \sup(A)$. Ceci contredit le fait que $\sup(A)$ est un majorant de A. Donc $S \leqslant \sup(A)$. Par conséquent $S = \sup(A)$, puisque $\sup(A)$ est le plus petit des majorants et que S en est un d'après a).

2. On rappelle que la notation $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ signifie $\sup f(\mathbb{R})$.

Dire que f est majorée, c'est dire que l'ensemble $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ admet un majorant. De plus $f(\mathbb{R})$ est non vide, donc admet une borne supérieure notée $S \in \mathbb{R}$. D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $f(\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = S$. Il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = y_n$. Et on a donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = S$.

Attention : c'est la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge (vers S). Rien ne dit que la suite des antécédents $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également. Considérons la fonction constante valant 0 sur $\mathbb{R}$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = n$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, pourtant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = 0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$. Autre exemple $f = \cos$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 2\pi(-1)^n$.

Exercice 11 (Le retour des séries)

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

1. Rappeler ce que signifie le fait que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, puis diverge.
2. Montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, alors son reste, i.e. la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, converge vers 0.
3. On suppose maintenant que u et v sont des suites à termes positifs et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.
   a) Montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
   b) Montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_v$ diverge.
   c) Ces résultats sont-ils encore vraies si les hypothèses sur u et v ne sont valables qu'à partir d'un certain rang ?

Correction.

1. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles, i.e. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, converge. Et elle diverge si et seulement si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge (c'est-à-dire ne converge pas).
2. Notons ℓ la valeur de la somme de la série. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \ell - \sum_{k=0}^{n} u_n = \ell - S_n$. La suite $(R_n)_n$ est la somme d'une suite constante et d'une suite convergente donc elle converge et sa limite vaut $\ell - \ell = 0$.
3. Méthode : en présence d'inégalités entre deux suites, on pense aux propriétés des suites monotones, adjacentes et au théorème des gendarmes.

   a) Notons $T = (T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$. Par hypothèse, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leqslant T_n$. Comme u et v sont à termes positifs, S et T sont des suites croissantes. Comme T converge, elle est donc majorée par sa limite notée ℓ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leqslant T_n \leqslant \ell$. Comme S est croissante et bornée, par le théorème de la limite monotone, S converge i.e. $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

   b) Comme S est croissante, on a soit S converge soit S a pour limite $+\infty$. Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, c'est donc que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leqslant T_n$, en passant à la limite dans l'inégalité, on déduit que $T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge.

   c) Oui car il suffit de considérer les suites tronquées $(u_n)_{n\geqslant r}$ et $(v_n)_{n\geqslant r}$, où $r \in \mathbb{N}$ est un rang à partir duquel les deux suites sont positives et l'inégalité $u_n \leqslant v_n$ est vraie, et d'appliquer alors les mêmes raisonnements que précédemment. La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.

Exercice 12

Soient $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ et $p \geqslant q > 0$. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{pu_n + qv_n}{p+q} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{qu_n + pv_n}{p+q}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, interpréter u_{n+1} et v_{n+1} en terme de moyennes et en déduire un encadrement (pour chacun).
2. Étudier les suites $u + v$ et $u - v$.
3. Montrer que les suites u et v sont adjacentes.
4. En déduire leur limite.

Correction.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} et v_{n+1} sont les moyennes pondérées de u_n et v_n de coefficients p et q (cf TD1) (on parle aussi de *combinaison convexe*[1]). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $m_n = \min(u_n, v_n)$ et $M_n = \max(u_n, v_n)$, alors puisque p et q sont strictement positifs, on a

$$\min(u_n, v_n) = \frac{pm_n + qm_n}{p+q} \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{pM_n + qM_n}{p+q} = \max(u_n, v_n),$$
$$\min(u_n, v_n) = \frac{qm_n + pm_n}{p+q} \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{qM_n + pM_n}{p+q} = \max(u_n, v_n)\,.$$

Remarque : puisque $p \geqslant q$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} est plus proche de u_n que de v_n (penser à la moyenne de deux notes avec des coefficients 5 et 1). On peut donc se représenter graphiquement deux situations : soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$, soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. On intuite donc que soit la suite u est croissante et alors v est décroissante, soit la suite u est décroissante et alors v est croissante. Pour trancher entre ces deux possibilités, il suffit de regarder le signe de $u_0 - v_0$, puisque si ce dernier est négatif alors nous sommes dans la première situation, sinon la seconde. Nous allons démontrer rigoureusement ces conjectures dans les deux questions qui suivent.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$, donc $u + v$ est la suite constante de valeur $u_0 + v_0$.

Posons $w = u - v$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{p-q}{p+q}(u_n - v_n)$, *i.e.* $w_{n+1} = rw_n$ avec $r = \frac{p-q}{p+q}$ et $w_n = u_n - v_n$. On reconnaît ainsi que $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison r. On a en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = r^n w_0 = r^n(u_0 - v_0)$. Or comme $p \geqslant q > 0$, on a $0 \leqslant r < 1$ et donc w tend vers 0. De plus w est de signe constant valant le signe de $u_0 - v_0$.

Remarque : en outre, si $p = q$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = v_n = \frac{u_0+v_0}{2}$. Si alternativement, $u_0 = v_0$ alors $u = v$.

3. Par définition, les suites u et v sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et $u - v$ tend vers 0.

On a vu que $w = u - v$ tend vers 0. De plus on a vu que w est de signe constant. Si $u_0 \leqslant v_0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - v_n \leqslant 0$. Sinon si $u_0 \geqslant v_0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - v_n \geqslant 0$. Étudions la monotonie de u et v. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{q}{p+q}(u_n - v_n),$$
$$v_{n+1} - v_n = \frac{q}{p+q}(u_n - v_n).$$

Ainsi, on déduit de ce calcul et de ce qui précède que si $u_0 \leqslant v_0$, alors u est croissante et v décroissante. Si par contre $u_0 \geqslant v_0$, alors u est décroissante et v est croissante. Dans tous les cas nous avons bien montrer que l'une des deux suites u, v est croissante et l'autre décroissante. Par conséquent u et v sont des suites adjacentes.

4. Comme u et v sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Or on a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = u_0 + v_0$. Donc par passage à la limite dans cette égalité, on obtient $\ell = \frac{u_0+v_0}{2}$.

Exercice 13

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = 1 - (x + x^2 + \ldots + x^n)$.

1. On souhaite étudier le comportement des zéros de P_n sur $\mathbb{R}_+$.
   a) Tracer sur $\mathbb{R}_+$ l'allure du graphe de $Q_n : x \mapsto x + x^2 + \ldots + x^n$ (pour un n assez grand). En déduire celui de P_n. Conjecturer le nombre de zéro de P_n sur $\mathbb{R}_+$.
   b) Étudier les variations de P_n sur $[0, +\infty[$.
   c) En déduire qu'il existe un unique $u_n > 0$ tel que $P_n(u_n) = 0$.
2. On note, à partir de maintenant, $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par la propriété : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et $P_n(u_n) = 0$. On souhaite montrer que u converge.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1}(u_n) < P_{n+1}(u_{n+1})$.
   b) En déduire que u est strictement décroissante.
   c) En déduire que u est convergente.

1. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Combinaison_convexe`

3. On souhaite déterminer la limite de u.

 a) Calculer u_2. En déduire alors que $u_n^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

 b) Rappeler comment calculer $\sum_{k=0}^{n} r^n$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2(1-u_n) = 1 - u_n^{n+1}$.

 c) En déduire la limite de u.

Correction.

1. a) Q est une somme de monômes strictement croissants (sur $\mathbb{R}_+$). On a $Q_n(0) = 0$, $Q_n(1) = n$ et $Q_n(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. On déduit le graphe de $-Q_n$ par symétrie par rapport à l'axe (Ox) puis de P_n par translation verticale. Graphiquement, on conjecture que P_n admet un unique zéro sur $\mathbb{R}_+$.
 Avec $P_n(0) = 1$ et $P_n(1) = 1 - n$, on peut se risquer à conjecturer que P_n s'annule de plus en plus proche de 0 quand n tend vers $+\infty$, sans aller jusqu'à 0 puisque $P_n(0) = 1$ et $P_n(x) = 1-x+\underset{x\to 0}{o}(x)$.
 Montrons ces belles conjectures :

 b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = 1 - \sum_{k=1}^{n} x^k$ et $P_n'(x) = -\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = -1 - \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)x^k$ donc si $x \geqslant 0$, $P_n'(x) < 0$. Ainsi, la fonction P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

 c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $P_n(0) = 1$ et P_n tend vers $-\infty$ en $+\infty$, par continuité de P_n il existe (nous verrons plus tard dans le cours que c'est grâce au théorème des valeurs intermédiaires) un $u_n > 0$ tel que $P_n(u_n) = 0$. Le caractère unique de u_n vient de l'injectivité de P_n, puisque strictement décroissante.

2. a) On a $P_{n+1}(u_n) = \underbrace{(1 - u_n - \ldots - u_n^n)}_{=P_n(u_n)=0} - u_n^{n+1} = -u_n^{n+1} < 0$. Et $P_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ par définition.
 Donc $P_{n+1}(u_n) < P_{n+1}(u_{n+1}) = 0$. Comme P_{n+1} est strictement décroissante, c'est donc que $u_{n+1} < u_n$. D'où u est strictement décroissante.

 b) u est strictement décroissante et minorée par 0 donc d'après le théorème de la limite monotone, u est convergente.

3. a) u est strictement décroissante donc pour tout $n \leqslant 2$, $u_n \leqslant u_2$. Ensuite on a $1 - u_2 - u_2^2 = 0$ avec $u_2 > 0$. Donc $u_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < \frac{-1+3}{2} = 1$.
 Attention, le terme sous la puissance dépend de n, on ne peut donc pas conclure directement que $u_n^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par contre $0 < u_n^{n+1} \leqslant u_2^{n+1}$ et $u_2^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $0 < u_2 < 1$. Donc par le théorème des gendarmes, on a bien $u_n^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

 b) Pour $q \neq 1$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. On a pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 = 1-(u_n+\ldots+u_n^n) = 2-(1+u_n+\ldots+u_n^n) = 2 - \frac{1-u_n^{n+1}}{1-u_n}$. La dernière égalité étant vraie car $u_n \neq 1$ et par la formule de la somme géométrique. On a donc bien l'équation souhaitée : $2(1-u_n) = 1 - u_n^{n+1}$.

 c) Notons ℓ la limite de u. On a donc $2(1-\ell) = 1$, d'où $\ell = \frac{1}{2}$.