

Licence 2^{ème} année, Mathématiques et Applications, 2024-2025

ANALYSE 3

Feuille de TD n°2

Suites réelles et complexes : convergence, limites et inégalités.

Exercices complémentaires d'entraînement

1. EXERCICES CORRIGÉS : PRISE EN MAIN

Exercice 1

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

1. On suppose que u est décroissante à partir du rang 5 et v est décroissante à partir du rang 9. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $u + v$ est décroissante.
2. On suppose que u est minorée à partir du rang 3 et v est positive à partir du rang 2. Montrer que $u + v$ est minorée.

Correction.

1. Pour tout $n \geq 5$, $u_{n+1} \leq u_n$ et pour tout $n \geq 9$, $v_{n+1} \leq v_n$ donc pour tout $n \geq 9$,

$$u_{n+1} + v_{n+1} \leq u_n + v_{n+1} \leq u_n + v_n.$$

Ainsi, $u + v$ est décroissante à partir du rang 9.

2. Il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq 3$, $u_n \geq m$. Posons $m_u = \min\{u_0, u_1, u_2, m\}$. Ce minimum est bien défini puisque l'ensemble est fini. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m_u$. De plus, pour tout $n \geq 2$, $v_n \geq 0$. Posons $m_v = \min\{v_0, v_1, 0\}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq m_v$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n \geq m_u + m_v$. Autrement dit, $u + v$ est minorée (par $m_u + m_v$).

On a démontré dans un cas particulier qu'une suite minorée APCR est minorée.

Exercice 2

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante. Montrer que $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ existe et donner sa valeur.

Correction.

Puisque u est décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$ et par récurrence immédiate, $u_0 \geq u_n$. En particulier, u_0 est un majorant de $A = \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$. Or $u_0 \in A$ donc $\max(A) = u_0$ d'où $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sup(A) = \max(A) = u_0$.

Exercice 3

Soient $\varepsilon > 0$ et $M \in \mathbb{R}$. Déterminer dans chacun des cas suivants le plus petit rang à partir duquel la propriété énoncée est vraie ou le plus grand rang jusqu'au quel la propriété énoncée est vraie.

1. $|u_n| < \varepsilon$, avec $u_n = \frac{3}{n^2+5}$
2. $u_n \geq M$, avec $u_n = 4 - n^2$
3. $u_n > 1$, avec $u_n = \tan(\frac{n\pi}{2n+9})$
4. $u_n < M$, avec $u_n = \ln(n)$

Correction.

On note N le rang recherché.

1. La suite est définie sur \mathbb{N} . Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, montrons que la propriété est vraie à partir d'un certain rang.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n| < \varepsilon \iff \frac{3}{n^2+5} < \varepsilon \iff n^2 > \frac{3}{\varepsilon} - 5.$$

Attention à ne pas appliquer une racine à une quantité strictement négative. Notons $x_\varepsilon = \frac{3}{\varepsilon} - 5$.

- ◇ Si $x_\varepsilon \leq 0$, l'inégalité est toujours vraie, i.e. $N = 0$.
- ◇ Si $x_\varepsilon > 0$, alors

$$|u_n| < \varepsilon \iff n > \sqrt{x_\varepsilon}$$

et cette inégalité est vraie à partir du rang $N = E(\sqrt{x_\varepsilon}) + 1$ qui est le plus petit entier strictement plus grand que $\sqrt{x_\varepsilon}$.

2. La suite u est définie sur \mathbb{N} et tend vers $-\infty$. Montrons donc que la propriété est éventuellement vraie jusqu'à un certain rang. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $4 - n^2 \geq M \iff n^2 \leq 4 - M$. Donc si $4 - M \leq 0$, la propriété n'est jamais vérifiée. Sinon on a

$$n^2 \leq 4 - M \iff n \leq \sqrt{4 - M} \iff n \leq E(\sqrt{4 - M}).$$

Le cas échéant, pour $N = E(\sqrt{4 - M})$ on a pour tout $n \leq N$, $u_n \geq M$.

3. La suite v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{n\pi}{2n+9} = \frac{\pi}{2} \frac{2n}{2n+9} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{9}{2n+9}\right)$ est strictement croissante et tend vers $\frac{\pi}{2}$.

Donc u est définie sur \mathbb{N} et puisque $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$, on a par composition des limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tan(v_n) = +\infty$. Montrons donc que la propriété est vraie à partir d'un certain rang.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\tan\left(\frac{n\pi}{2n+9}\right) > 1 \iff \frac{n\pi}{2n+9} > \frac{\pi}{4} \iff 4n > 2n+9 \iff n > 9/2.$$

Ainsi $u_n > 1$ est vraie pour tout indice n supérieur ou égal à $N = E(9/2) + 1 = 5$.

4. La suite u est définie sur \mathbb{N}^* et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, donc montrons que la propriété est vraie jusqu'à un certain rang.

Cherchons donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \leq N$, $u_n < M$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_n < M \iff n < e^M$ donc si $e^M \leq 1$ l'inégalité n'est jamais vérifiée. Supposons maintenant que $e^M > 1$ et cherchons N tel que pour tout $n \leq N$, $n < e^M$. Si $e^M \in \mathbb{N}$, posons alors $N = e^M - 1$ sinon, posons $N = E(e^M)$.

Exercice 4

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}) \iff (\forall n, p \in \mathbb{N}, n < p \Rightarrow u_n < u_p).$$

Correction.

On montre cette équivalence par une double implication.

(\Leftarrow) Supposons que

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, n < p \Rightarrow u_n < u_p$$

alors l'inégalité $u_n < u_p$ est en particulier vraie pour $p = n + 1$ car $n < n + 1$.

(\Rightarrow) Supposons que

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}.$$

Il reste à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, si $n < p$, alors $u_n < u_p$. Ce "pour tout" appelle à une récurrence. La propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+k}$$

s'obtient par récurrence immédiate sur $k \in \mathbb{N}^*$ à partir de l'hypothèse (1). Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $p \in \mathbb{N}$, si $p > n$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = n + k$. D'où $u_n < u_p$.

Exercice 5

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Montrer que si u est croissante et v minorée, alors $u + v$ est minorée.
2. On suppose que u est croissante et f décroissante. Montrer que $v = f(u)$ est monotone.
3. On suppose que u est majorée à partir d'un certain rang. Montrer que u est majorée.
4. On suppose que u est bornée à partir d'un certain rang. Montrer que u est bornée.
5. Montrer que si u est minorée, alors $v = e^{-u}$ est majorée.
6. Montrer que si u est croissante et v négative et décroissante, alors uv est décroissante.

Correction.

Méthode : on réécrit les hypothèses et leurs définitions. (On n'hésite pas à écrire en langage mathématique l'objectif pour clarifier ce qu'il faut démontrer)

1. Supposons u croissante et v minorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ et il existe $m_v \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_v \leq v_n$.

On cherche à minorer $u_n + v_n$ indépendamment de n . Il reste donc à minorer u_n .

Par récurrence immédiate, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n$ d'où $u_0 + m_v \leq u_n + v_n$. Ainsi, $m = u_0 + m_v$ est un minorant de $u + v$, d'où $u + v$ est minorée.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$, $f(x) \geq f(y)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = f(u_n) \geq f(u_{n+1}) = v_{n+1}$. Autrement dit, v est décroissante donc monotone.

3. Puisque u est majorée à partir d'un certain rang, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq M$. Il reste à majorer les N premiers termes de u . Ils sont en nombre fini donc le maximum de cet ensemble existe.

Notons $M_0 = \max(\{u_n / n \in \mathbb{N}, n < N\})$. M_0 est bien défini car un ensemble fini admet un maximum. Pour tout $n < N$, $u_n \leq M_0$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \max(M_0, M)$. u est donc majorée par $\max(M_0, M)$.

4. On pourrait symétriser la question précédente avec la propriété d'être minoré et conclure que u étant majorée et minorée, u est bornée. Optons ici pour une démonstration directe du caractère borné. Il s'agit de la même démonstration que la précédente pour la suite $|u|$.

Puisque u est bornée à partir d'un certain rang, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq M$. Notons $M_0 = \max(\{|u_n| / n \in \mathbb{N}, n < N\})$. M_0 est bien défini car un ensemble fini admet un maximum. Pour tout $n < N$, $|u_n| \leq M_0$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \max(M_0, M)$. u est donc bornée par $\max(M_0, M)$.

5. Supposons u minorée. Alors il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq 0$, $m \leq u_n$. Puisque $t \mapsto e^{-t}$ est décroissante, on a pour tout $n \geq 0$, $v_n = e^{-u_n} \leq e^{-m}$. Ainsi, v est majorée par e^{-m} .

6. Supposons que u est croissante et que v est négative et décroissante. On a alors pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq u_{n+1}$ d'où $u_n v_n \geq u_{n+1} v_n$ car v est négative et $u_n v_n \geq u_{n+1} v_n \geq u_{n+1} v_{n+1}$ car v est décroissante. Donc uv est décroissante.

Exercice 6

Soient $\ell \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrer que la suite z converge vers ℓ si et seulement si la suite \bar{z} converge vers $\bar{\ell}$.

Correction.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \Re(z_n)$ et $y_n = \Im(z_n)$. Alors $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$. D'après le cours, z converge si et seulement si x et y convergent. En appliquant cette propriété à \bar{z} , \bar{z} converge si et seulement si x et $-y$ convergent. Or y converge si et seulement si $-y$ converge. Par transitivité des équivalences, z converge si et seulement si \bar{z} converge.

De plus, si z converge vers ℓ alors x converge vers $\Re(\ell)$ et y converge vers $\Im(\ell)$. De même, si \bar{z} converge vers $\bar{\ell}$ alors x converge vers $\Re(\bar{\ell})$ et $-y$ converge vers $\Im(\bar{\ell})$. Par unicité de la limite, $\Re(\ell) = \Re(\bar{\ell})$ et $\Im(\ell) = -\Im(\bar{\ell})$, i.e. $\ell = \bar{\bar{\ell}}$.

Exercice 7

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante convergeant vers 0. Montrer que u est négative.

Correction.

Formalisons cet énoncé : La suite u converge vers 0 donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n| < \varepsilon.$$

Elle est croissante donc

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, n \leq p \Rightarrow u_n \leq u_p.$$

Si u admet un seul terme strictement positif, alors tous les termes suivants de la suite sont strictement positifs et donc intuitivement soit la suite décroît vers 0 soit elle ne tend pas vers 0. Raisonnons donc par l'absurde :

Supposons par l'absurde qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > 0$. Alors pour tout $p \geq N$, $u_N \leq u_p$.

Combinons toutes les hypothèses : on a d'un côté $u_N \leq u_p$ et de l'autre, pour tout $\varepsilon > 0$, $|u_p| < \varepsilon$ sous réserve que p soit assez grand, d'où $u_N < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}u_N$. On a bien $\varepsilon > 0$. Puisque u converge vers 0, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq N_\varepsilon$, $|u_p| < \varepsilon$. Ainsi si $p \geq \max(N_\varepsilon, N)$, $u_N \leq u_p < \varepsilon = \frac{1}{2}u_N$. Contradiction.

La suite u est donc négative.

Exercice 8

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante. On suppose que $\max_{n \in \mathbb{N}} u_n$ existe. Montrer que u est stationnaire.

Correction.

Exemple : $u = (2, 3, \pi, 5, 8, 8, 8, 8, \dots)$. Si au rang N , la suite atteint son maximum, elle ne peut plus ni croître ni décroître puisqu'elle est croissante.

Notons $M = \max_{n \in \mathbb{N}} u_n = \max\{u_n / n \in \mathbb{N}\}$. Alors par définition du maximum, $M \in \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$

tel que $u_N = M$. De plus, M majore la suite donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$, i.e. $u_n \leq u_N$. Or u est croissante, donc pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, $u_n = u_N$ (par double inégalité) et u est donc stationnaire (de limite M).

Exercice 9

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite de limite $\ell \in \mathbb{K}$. Consigne : pour cet exercice, on n'utilisera aucune propriété sur la notion de limite autre que la définition.

1. Montrer que la suite $v = u - \ell$ tend vers 0.

2. Montrer que la suite $v = \frac{u}{3}$ tend vers $\frac{\ell}{3}$.

3. Montrer que la suite $v = u^2$ tend vers ℓ^2 .

Correction.

Notons $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La suite v converge vers ℓ_v si on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |v_n - \ell_v| < \varepsilon.$$

1. Posons $\ell_v = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \ell_v| = |u_n - \ell|$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque u converge vers ℓ , il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

2. Posons $\ell_v = \frac{\ell}{3}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \ell_v| = \left| \frac{u_n}{3} - \frac{\ell}{3} \right| = \frac{1}{3} |u_n - \ell|$. Soit $\varepsilon > 0$ et posons $\varepsilon' = 3\varepsilon$. Puisque u converge vers ℓ , il existe $N_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_{\varepsilon'}$, $|u_n - \ell| < \varepsilon'$. Ainsi, en posant $N_\varepsilon = N_{\varepsilon'}$, on a pour tout $n \geq N_\varepsilon$, $|v_n - \ell_v| < \varepsilon$.

3. Posons $\ell_v = \ell^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \ell_v| = |u_n^2 - \ell^2|$.

On doit majorer $|v_n - \ell_v|$ par une quantité qui ne dépend plus de n à partir d'un certain rang. Or on sait contrôler $|u_n - \ell|$. On fait donc apparaître cette quantité par l'identité remarquable :

$|v_n - \ell_v| = |u_n - \ell||u_n + \ell| \leq |u_n - \ell|(|u_n| + |\ell|) \leq |u_n - \ell|(\max_n |u_n| + |\ell|)$. On pourrait utiliser que u étant convergente, elle est bornée mais au vu des consignes de l'énoncé, on va à la place se ramener à nouveau à $|u_n - \ell|$:

$|v_n - \ell_v| = |u_n - \ell||u_n + \ell| = |u_n - \ell||u_n - \ell + 2\ell| \leq |u_n - \ell|(|u_n - \ell| + 2|\ell|)$. Soit maintenant $\varepsilon > 0$.

Cherchons $\varepsilon' > 0$ tel que $\varepsilon'^2 + 2\varepsilon'|\ell| \leq \varepsilon$. Par exemple, en imposant $\varepsilon'^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $2\varepsilon'|\ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $\varepsilon' = \min\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}, \frac{\varepsilon}{4|\ell|}\right)$ si $\ell \neq 0$ et $\varepsilon' = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}$ sinon. Puisque u converge vers ℓ , il existe $N_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_{\varepsilon'}$, $|u_n - \ell| < \varepsilon'$. Ainsi, en posant $N_\varepsilon = N_{\varepsilon'}$, on a pour tout $n \geq N_\varepsilon$, $|v_n - \ell_v| < \varepsilon'^2 + 2\varepsilon'|\ell| \leq \varepsilon$.

2. EXERCICES CORRIGÉS : RÉVISIONS ET APPROFONDISSEMENT

Exercice 10

Soient $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $z_n = x_n + iy_n$. Montrer en utilisant uniquement la définition de limite que si z converge vers 0 alors x et y convergent vers 0.

Correction.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$, $|x_n| = |\Re(z_n)| \leq |z_n|$, $|y_n| = |\Im(z_n)| \leq |z_n|$.

Supposons que z converge vers 0 et soit $\varepsilon > 0$. On cherche $N_{x,\varepsilon}$ et $N_{y,\varepsilon}$ tels que

$$\forall n \geq N_{x,\varepsilon}, |x_n| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_{y,\varepsilon}, |y_n| < \varepsilon.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq |z_n|$ et $|y_n| \leq |z_n|$ et puisque z converge vers 0, il existe $N_{z,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_{z,\varepsilon}, |z_n| < \varepsilon.$$

Donc pour tout $n \geq N_{z,\varepsilon}$, $|x_n| \leq |z_n| < \varepsilon$ et $|y_n| \leq |z_n| < \varepsilon$. On peut donc poser $N_{x,\varepsilon} = N_{y,\varepsilon} = N_{z,\varepsilon}$.

Exercice 11 (Sur $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ - Partie 1)

1. Soit $\ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon [\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

2. En déduire que toute suite convergente à valeurs dans \mathbb{Z} est stationnaire.

Correction.

1. On demande de démontrer un cas particulier de la propriété du cours suivante (du moins le sens direct) :

$$\ell \in]a, b[\iff \exists \varepsilon > 0,] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon [\subset]a, b[.$$

Notons $p = E(\ell)$ la partie entière de ℓ . Puisque $\ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a $p < \ell < p + 1$. Posons $\varepsilon_0 = \frac{\ell - p}{2}$ et $\varepsilon_1 = \frac{p + 1 - \ell}{2}$ alors $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ et

$$p < p + \varepsilon_0 = \ell - \varepsilon_0 < \ell < \ell + \varepsilon_1 = p - \varepsilon_1 < p + 1.$$

En particulier, $] \ell - \varepsilon_0, \ell + \varepsilon_1 [\subset]p, p + 1[$. Pour centrer cet intervalle sur ℓ , on pose par exemple $\varepsilon = \min(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$.

Ainsi, $] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon [\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

2. Formalisons cet énoncé. Soit u une suite à valeurs entières (on pourrait noter $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ ou encore $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$), u est un cas particulier de suite réelle.

On explicite la définition de suite convergente. Puisque u est convergente, il existe $\ell \in \mathbb{R}$ telle que u tend vers ℓ . On a donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Rappelons que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ équivaut à $u_n \in] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon [$.

On explicite le résultat à démontrer. u est stationnaire si et seulement si

$$\exists a \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n = a.$$

Si par l'absurde $\ell \notin \mathbb{Z}$ alors d'après la question précédente, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon [\subset E(\ell), E(\ell) + 1 [\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Par convergence de u vers ℓ , il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, $u_n \in] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon [$, d'où en particulier $u_n \notin \mathbb{Z}$. Contradiction.

Ainsi $\ell \in \mathbb{Z}$. Soit alors $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, de sorte que ℓ est le seul entier de l'intervalle $] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon [$. De nouveau par convergence de u vers ℓ , il existe N_ε tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, on a $u_n \in] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon [$, i.e. $u_n = \ell$ car u_n est entier. En d'autres termes, u est stationnaire.

Exercice 12 (Sur $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ - Partie 2)

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Montrer que u est stationnaire si et seulement si elle vérifie à partir d'un certain rang $u_{n+1} = u_n$.

2. On suppose maintenant que u est à valeurs dans \mathbb{Z} et qu'elle est convergente. En majorant $|u_{n+1} - u_n|$ à partir d'un certain rang, montrer que u est stationnaire.

Correction.

1. (\Rightarrow) Si u est stationnaire, il existe $a \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n = a$. En particulier, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} = a = u_n$.
 (\Leftarrow) S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} = u_n$. Alors en posant $a = u_N$, on a pour tout $n \geq N$, $u_n = a$. La suite est donc stationnaire.

2. Formalisons cet énoncé et faisons parler les hypothèses. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Z}$ d'où aussi $u_{n+1} - u_n \in \mathbb{Z}$ donc soit $|u_{n+1} - u_n| = 0$ soit $|u_{n+1} - u_n| \geq 1$. Autrement dit, si on trouve un majorant dans $[0, 1[$, alors u est stationnaire. Puisque u est convergente, il existe $\ell \in \mathbb{R}$ telle que u tend vers ℓ . On a donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Pour relier les quantités $|u_{n+1} - u_n|$ et $|u_n - \ell|$, on utilise l'inégalité triangulaire.

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de u . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_{n+1} - u_n| = |u_{n+1} - \ell + \ell - u_n| \leq |u_{n+1} - \ell| + |\ell - u_n|.$$

Posons alors $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Puisque u converge vers ℓ , il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1} - \ell| + |\ell - u_n| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Ainsi pour tout $n \geq N$, puisque $|u_{n+1} - u_n| < 1$ et $|u_{n+1} - u_n| \in \mathbb{N}$, on obtient $u_{n+1} = u_n$. La suite est donc stationnaire (d'après la question précédente).

Exercice 13 (Inversion de quantificateurs)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite convergant vers 0. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists p > n, |u_p| < \varepsilon.$$

Que signifie cette propriété? Donner sa négation.

Correction.

Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On cherche à construire $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > n$ et $|u_p| < \varepsilon$.

On traduit l'hypothèse en prenant soin de ne pas réutiliser la variable n maintenant fixée dans notre raisonnement :

Puisque u tend vers 0, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N_\varepsilon$, $|u_k| < \varepsilon$.

Si $N_\varepsilon > n$, $p = N_\varepsilon$ convient car alors $p > n$ et $p \geq N_\varepsilon$ donc $|u_p| < \varepsilon$.

Si $N_\varepsilon \leq n$, $p = n + 1$ convient car alors $p > n$ et $p \geq N_\varepsilon$ donc $|u_p| < \varepsilon$.

Autrement dit, $p = \max(N_\varepsilon, n + 1)$ convient.

Cette propriété signifie que l'on peut trouver des éléments de la suite aussi petit que l'on veut en valeur absolue, pour des indices aussi grands que l'on veut.

Sa négation est

$$\exists \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall p > n, |u_p| \geq \varepsilon.$$

Exercice 14

Soit u une suite réelle. On souhaite montrer que u n'est pas monotone si et seulement si

$$(2) \quad \exists n, p, q \in \mathbb{N}, n < p < q \text{ et } (u_p > \max(u_n, u_q) \text{ ou } u_p < \min(u_n, u_q))$$

1. Montrer le sens indirect.

2. ★ Montrer le sens direct.

Correction.

Reformulons : L'expression (1) de l'énoncé équivaut à

$$\exists n, p, q \in \mathbb{N}, n < p < q \text{ et } ((u_p > u_n \text{ et } u_p > u_q) \text{ ou } (u_n > u_p \text{ et } u_q > u_p))$$

Soit encore

$$\exists n, p, q \in \mathbb{N}, n < p < q \text{ et } ((u_n < u_p \text{ et } u_p > u_q) \text{ ou } (u_n > u_p \text{ et } u_p < u_q)).$$

Les trois indices caractérisent le fait que soit u croît puis décroît, soit u décroît puis croît (au sens strict) :

k	n	p	q
u_k	u_n	u_p	u_q

ou bien

k	n	p	q
u_k	u_n	u_p	u_q

On reformule la prémisse (en deux temps) : u est monotone si elle est croissante ou décroissante *i.e.*

$$(\forall n, p \in \mathbb{N}, n \leq p \Rightarrow u_n \leq u_p) \text{ ou } (\forall n, p \in \mathbb{N}, n \leq p \Rightarrow u_p \leq u_n)$$

Par négation, u n'est pas monotone si et seulement si

$$(\exists n, p \in \mathbb{N}, n > p \text{ et } u_n > u_p) \text{ et } (\exists n, p \in \mathbb{N}, n > p \text{ et } u_p > u_n).$$

Les variables sont muettes et on pourrait les laisser indifférenciées mais pour clarifier les raisonnements, on peut encore écrire (avec un abus de notation) que u n'est pas monotone si et seulement si

$$\exists n_1 < n_2 \in \mathbb{N}, u_{n_1} < u_{n_2} \text{ et } \exists p_1 < p_2 \in \mathbb{N}, u_{p_1} > u_{p_2}.$$

Montrons l'équivalence par double implication.

(\Leftarrow) On distingue les 2 cas. 1er cas : supposons que

$$\exists n, p, q \in \mathbb{N}, n < p < q, u_n < u_p \text{ et } u_p > u_q$$

Alors en posant $n_1 = n, n_2 = p, p_1 = p, p_2 = q$, on a bien

$$n_1 < n_2, u_{n_1} < u_{n_2}, p_1 < p_2 \text{ et } u_{p_1} > u_{p_2}.$$

Donc u n'est pas monotone. 2ème cas : supposons que

$$\exists n, p, q \in \mathbb{N}, n < p < q, u_n > u_p \text{ et } u_p < u_q$$

Alors en posant $n_1 = p, n_2 = q, p_1 = n, p_2 = p$, on a bien

$$n_1 < n_2, u_{n_1} < u_{n_2}, p_1 < p_2 \text{ et } u_{p_1} > u_{p_2}.$$

Donc u n'est pas monotone.

(\Rightarrow) Supposons que u n'est pas monotone *i.e.*

$$\exists n_1 < n_2 \in \mathbb{N}, u_{n_1} < u_{n_2} \text{ et } \exists p_1 < p_2 \in \mathbb{N}, u_{p_1} > u_{p_2}.$$

On construit $n < p < q$ en distinguant à nouveau les cas (il est très fortement conseillé de raisonner sur des dessins).

- Si $n_1 < n_2 < p_1 < p_2$, alors on pose $n = n_1, q = p_2$ et $p = \begin{cases} n_2 & \text{si } u_{n_2} > u_{p_1} \\ p_1 & \text{sinon} \end{cases}$ de sorte que $u_n < u_p$ et $u_p > u_q$.
- Si $n_1 < n_2 < p_2$, on fait de même car l'ordre entre n_2 et p_1 n'a pas servi dans le cas précédent.
- Si $p_1 < n_1 < n_2 < p_2$ (c'est le cas le plus délicat!).

Si $u_{n_1} > u_{p_1}$, on conserve le triplet $p_1 < n_1 < p_2$ car alors $u_{p_1} < u_{n_1}$ et $u_{n_1} > u_{p_1} > u_{p_2}$.

Si $u_{n_1} = u_{p_1}$, on conserve le triplet $p_1 < n_2 < p_2$ car alors $u_{p_1} = u_{n_1} < u_{n_2}$ et $u_{n_2} > u_{n_1} = u_{p_1} > u_{p_2}$.

Si $u_{n_1} < u_{p_1}$, on conserve le triplet $p_1 < n_1 < n_2$ car alors $u_{p_1} < u_{n_1}$ et $u_{n_1} > u_{n_2}$.

Les trois cas $n_1 < p_1 < p_2 < n_2, p_1 < n_1 < p_2 < n_2$ et $p_1 < p_2 < n_1 < n_2$ sont symétriques des précédents, on les laisse en exercice.

Exercice 15

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 0.

1. Montrer que uv tend vers 0 en utilisant le théorème des gendarmes.
2. Montrer que uv tend vers 0 sans utiliser le théorème des gendarmes.

Correction.

1. Construisons deux suites encadrant uv et de limite nulle. Attention, le théorème des gendarmes s'applique sur des suites réelles ; mais si u est une suite complexe, $|u|$ est une suite réelle.

▮ Méthode : une suite w tend vers 0 si et seulement si $|w|$ tend vers 0.

▮ Remarque bonus : une suite w tend vers $\ell \in \mathbb{K}$ si et seulement si $w - \ell$ tend vers 0.

Comme u est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ *i.e.* $-M \leq u_n \leq M$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq |u_n||v_n| \leq M|v_n|$. Attention, si on multiplie l'inégalité par v_n , elle change de sens si v_n est négatif ! Par opération sur les suites, $M|v|$ converge vers 0. Ainsi d'après le théorème des gendarmes, $|uv|$ tend vers 0 donc uv également. La suite minorante étant la suite nulle.

2. Comme u est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$. Soit $\varepsilon > 0$, par convergence de la suite v vers 0, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, |v_n| = |v_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$. Mais alors pour tout $n \geq n_0, |u_n v_n - 0| = |u_n||v_n| \leq M|v_n| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. Ainsi, nous venons de montrer que la suite $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 16 (Série harmonique)

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que la suite u est soit convergente, soit tend vers $+\infty$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1, u_{2n} \geq \frac{1}{2} + u_n$.
3. En déduire que u tend vers $+\infty$.

Correction.

1. "Converger ou diverger vers $\pm\infty$ " est une propriété des suites monotones.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$. Donc u est (strictement) croissante. Donc d'après le cours, soit u converge, soit u tend vers $+\infty$.

2. On a pour tout $n \geq 1$

$$u_{2n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = (2n - n) \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

d'où $u_{2n} \geq \frac{1}{2} + u_n$.

3. Quand on bloque, on tente de raisonner par l'absurde. On pourrait prendre la négation en toute généralité de " u tend vers $+\infty$ ", mais on va être un peu plus rapide en utilisant la première question.

D'après la première question, soit u converge, soit u tend vers $+\infty$. Supposons par l'absurde que u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on a $\ell \geq \ell + \frac{1}{2}$. C'est impossible. Donc u tend vers $+\infty$.

Exercice 17 (Cours : complément du théorème de la limite monotone)

Soit u une suite réelle. Si u est décroissante et minorée, alors u est convergente vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell \leq u_n$.

1. Montrer ce résultat en utilisant le théorème de la limite monotone pour les suites croissantes.

2. Montrer ce résultat sans utiliser le théorème de la limite monotone. *Indication : on pourra poser $\ell = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$.*

Correction.

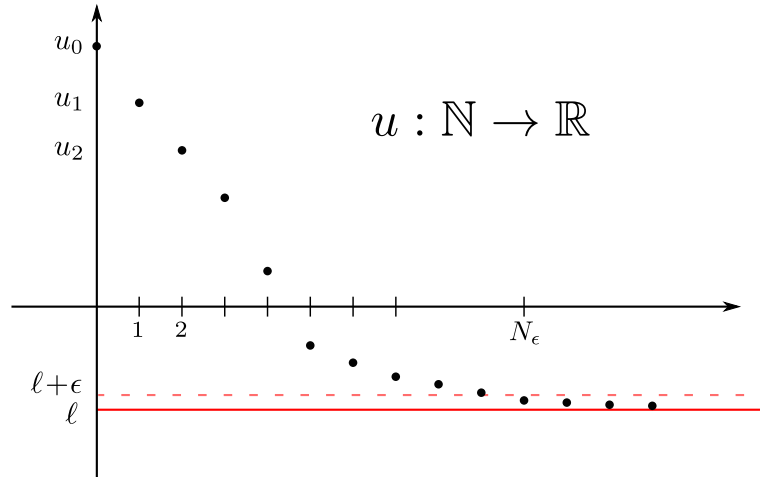


FIGURE 1. Exercice 17 : illustration d'une suite décroissante et minorée, où $\ell = \inf u(\mathbb{N})$.

1. D'après le théorème de la limite monotone, si v est croissante et majorée, alors v est convergente vers une limite $\ell_v \in \mathbb{R}$ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq \ell_v$.

En appliquant ce résultat à $v = -u$, il existe donc $\ell_v \in \mathbb{R}$ telle que $-u$ converge vers ℓ_v et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-u_n \leq \ell_v$. Ainsi, u converge vers $\ell = -\ell_v$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \ell$.

2. Comme u est minorée, l'ensemble $u(\mathbb{N}) = \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ est une partie minorée non vide de \mathbb{R} . Ainsi, par la propriété de la borne inférieure, $u(\mathbb{N})$ admet une borne inférieure, que l'on note $\ell \in \mathbb{R}$. On a donc en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell \leq u_n$ puisque ℓ est un minorant de $u(\mathbb{N})$.

Montrons que u est convergente, de limite ℓ . Soit $\varepsilon > 0$, par la caractérisation de la borne inférieure, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que $\ell \leq u_{N_\varepsilon} < \ell + \varepsilon$. Mais alors, pour tout $n \geq N_\varepsilon$, comme u est décroissante, il vient $\ell \leq u_n \leq u_{N_\varepsilon} < \ell + \varepsilon$, c'est-à-dire $u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. La suite u est donc bien convergente, de limite ℓ .