Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 2ème année, Mathématiques et Applications, 2024-2025
ANALYSE 3

Feuille de TD n°2

Suites réelles et complexes : convergence, limites et inégalités.

Exercices complémentaires d'entraînement

1. EXERCICES CORRIGÉS : PRISE EN MAIN

Exercice 1
Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

1. On suppose que u est décroissante à partir du rang 5 et v est décroissante à partir du rang 9. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $u + v$ est décroissante.
2. On suppose que u est minorée à partir du rang 3 et v est positive à partir du rang 2. Montrer que $u+v$ est minorée.

Exercice 2
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante. Montrer que $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ existe et donner sa valeur.

Exercice 3
Soient $\varepsilon > 0$ et $M \in \mathbb{R}$. Déterminer dans chacun des cas suivants le plus petit rang à partir duquel la propriété énoncée est vraie ou le plus grand rang jusqu'au quel la propriété énoncée est vraie.

1. $|u_n| < \varepsilon$, avec $u_n = \frac{3}{n^2+5}$
2. $u_n \geqslant M$, avec $u_n = 4 - n^2$
3. $u_n > 1$, avec $u_n = \tan(\frac{n\pi}{2n+9})$
4. $u_n < M$, avec $u_n = \ln(n)$

Exercice 4
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}) \iff (\forall n, p \in \mathbb{N}, n < p \Rightarrow u_n < u_p).$$

Exercice 5
Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que si u est croissante et v minorée, alors $u + v$ est minorée.
2. On suppose que u est croissante et f décroissante. Montrer que $v = f(u)$ est monotone.
3. On suppose que u est majorée à partir d'un certain rang. Montrer que u est majorée.
4. On suppose que u est bornée à partir d'un certain rang. Montrer que u est bornée.
5. Montrer que si u est minorée, alors $v = e^{-u}$ est majorée.
6. Montrer que si u est croissante et v négative et décroissante, alors uv est décroissante.

Exercice 6
Soient $\ell \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrer que la suite z converge vers ℓ si et seulement si la suite $\overline{z}$ converge vers $\overline{\ell}$.

Exercice 7
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante convergeant vers 0. Montrer que u est négative.

Exercice 8
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante. On suppose que $\max_{n\in\mathbb{N}} u_n$ existe. Montrer que u est stationnaire.

Exercice 9
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite de limite $\ell \in \mathbb{K}$. *Consigne : pour cet exercice, on n'utilisera aucune propriété sur la notion de limite autre que la définition.*

1. Montrer que la suite $v = u - \ell$ tend vers 0.
2. Montrer que la suite $v = \dfrac{u}{3}$ tend vers $\dfrac{\ell}{3}$.
3. Montrer que la suite $v = u^2$ tend vers ℓ^2.

Exercice 10
Soient $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $z_n = x_n + iy_n$. Montrer en utilisant uniquement la définition de limite que si z converge vers 0 alors x et y convergent vers 0.

Exercice 11 (Sur $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ - Partie 1)

1. Soit $\ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
2. En déduire que toute suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est stationnaire.

Exercice 12 (Sur $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ - Partie 2)
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Montrer que u est stationnaire si et seulement si elle vérifie à partir d'un certain rang $u_{n+1} = u_n$.
2. On suppose maintenant que u est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et qu'elle est convergente. En majorant $|u_{n+1} - u_n|$ à partir d'un certain rang, montrer que u est stationnaire.

Exercice 13 (Inversion de quantificateurs)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 0. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists p > n, |u_p| < \varepsilon.$$

Que signifie cette propriété ? Donner sa négation.

Exercice 14
Soit u une suite réelle. On souhaite montrer que u n'est pas monotone si et seulement si

$$\exists n, p, q \in \mathbb{N}, n < p < q \text{ et } (u_p > \max(u_n, u_q) \text{ ou } u_p < \min(u_n, u_q)) \tag{1}$$

1. Montrer le sens indirect.
2. $\star$ Montrer le sens direct.

Exercice 15
Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 0.

1. Montrer que uv tend vers 0 en utilisant le théorème des gendarmes.
2. Montrer que uv tend vers 0 sans utiliser le théorème des gendarmes.

Exercice 16 (Série harmonique)
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. Montrer que la suite u est soit convergente, soit tend vers $+\infty$.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_{2n} \geqslant \frac{1}{2} + u_n$.
3. En déduire que u tend vers $+\infty$.

Exercice 17 (Cours : complément du théorème de la limite monotone)
Soit u une suite réelle. Si u est décroissante et minorée, alors u est convergente vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell \leqslant u_n$.

1. Montrer ce résultat en utilisant le théorème de la limite monotone pour les suites croissantes.
2. Montrer ce résultat sans utiliser le théorème de la limite monotone. *Indication : on pourra poser* $\ell = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$.