Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 2ème année, Mathématiques et Applications, 2023-2024
Analyse 3

Feuille de TD no2 - Correction Exercice 8

Exercice 8 (Cours : opérations sur les suites divergentes)
Soit u et v deux suites réelles.

1. Montrer que si u converge vers $\ell > 0$ et v tend vers $+\infty$, alors le produit uv tend vers $+\infty$.
2. Si u tend vers $+\infty$ et v tend vers $-\infty$, alors uv tend vers $-\infty$.
3. Si u converge vers ℓ et si v tend vers $+\infty$, alors la suite des quotients $\frac{u}{v} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bien définie à partir d'un certain rang et est une suite convergente, de limite 0.
4. Soit u et v deux suites réelles. Si u est minorée et si v tend vers $+\infty$, alors $u+v$ tend vers $+\infty$. En particulier, si u est convergente et si v tend vers $+\infty$, alors $u+v$ tend vers $+\infty$.

Correction.
Rappel : on dit que u tend vers $+\infty$ si

$$\forall M > 0,\ \exists N_M \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_M,\ u_n > M. \tag{1}$$

Il est important de garder en mémoire que le "$\forall M > 0$" peut se réécrire de manière équivalente "$\forall M > 1$", ou "$\forall M > a$", avec n'importe qu'elle constante $a \in \mathbb{R}$ préalablement choisie ou même "$\forall M \in \mathbb{R}$". Dit autrement, on peut montrer que toutes ces assertions en remplaçant comme proposé le "$\forall M > 0$", peuvent être montrées comme équivalentes. En fonction du contexte, on peut donc être amené à choisir une formulation plutôt qu'une autre, même si dans la très grande majorité des cas c'est (1) qui est utilisée. Ce qui compte dans cette définition, c'est que M est autorisé à prendre des valeurs arbitrairement grandes.

1. On veut prouver que uv satisfait la définition

$$\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n v_n > M.$$

Il faut donc chercher à minorer les quantités u_n et v_n. Comme u converge, on a APCR $u_n > \frac{\ell}{2}$, donc APCR $u_n v_n > \frac{\ell}{2} v_n > \frac{\ell}{2}\frac{2M}{\ell} = M$ en imposant $v_n > \frac{2M}{\ell}$ grâce à v tend vers $+\infty$. Mettons rigoureusement ce raisonnement en place

Soit $M > 0$. Comme u converge vers ℓ, il existe $N_u \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_u$, $\ell - \frac{\ell}{2} < u_n < \ell + \frac{\ell}{2}$ (on a considéré $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$) d'où $u_n > \frac{\ell}{2}$. Comme v tend vers $+\infty$, il existe $N_v \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_v$, $v_n > \frac{2M}{\ell}$. Donc pour tout $n \geqslant N = \max(N_u, N_v)$, on a $u_n v_n > \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2M}{\ell} = M$. Ainsi uv tend vers $+\infty$.

2. On veut prouver que uv satisfait la définition

$$\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n v_n < -M.$$

Comme u tend vers $-\infty$, on peut le majorer APCR par -1, et comme v tend vers $+\infty$, on peut le minorer APCR par M. On obtient donc APCR $u_n v_n < (-1) \cdot v_n < -M$. Il faut être vigilant aux signes des quantités impliquées et à leur impact sur les inégalités.

Soit $M > 0$. Comme u tend vers $-\infty$, il existe $N_u \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_u$, $u_n < -1$. Puis comme v tend vers $+\infty$, il existe $N_v \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_v$, $v_n > M$. Ainsi pour tout $n \geqslant \max(N_u, N_v)$, en multipliant par $v_n > M > 0$ l'inégalité $u_n < -1$, on obtient $u_n v_n < -M$. D'où uv tend vers $-\infty$.

3. Comme v tend vers $+\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $v_n > 0$. Donc la suite $\frac{u}{v}$ est bien définie à partir du rang N. Notons que ce rang N n'est pas forcément optimal : il est possible qu'il existe un rang plus petit que N à partir duquel la suite quotient $\frac{u}{v}$ est bien définie. Nous avons juste montré qu'un rang existe sans chercher à définir le plus petit. La suite $\frac{u}{v}$ est donc bien définie sauf éventuellement pour un nombre fini d'entiers naturels. On peut donc discuter légitimement dans ce qui suit de la limite de cette suite en $+\infty$ puisque cela n'impose des contraintes sur la suite qu'à partir d'un certain rang (asymptotiquement).

Puisque u est convergente, u est bornée. Pour obtenir que $\frac{u}{v}$ tend vers 0, il suffit donc de montrer que $\frac{1}{v}$ tend vers 0, car le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle est une suite de limite nulle.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme v tend vers $+\infty$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, $v_n > \frac{1}{\varepsilon}$ d'où $\frac{1}{v_n} < \varepsilon$. On déduit aussi que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, on a $v_n > 0$, et donc $\frac{1}{v_n} > 0$. Par conséquent, on a montré que

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad -\varepsilon < 0 < \frac{1}{v_n} < \varepsilon,$$

i.e. $\frac{1}{v}$ converge vers 0. Finalement, on a donc bien que $\frac{u}{v}$ tend vers 0.

4. u est minorée donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$ pour un certain $m \in \mathbb{R}$. On veut montrer $u+v$ tend vers $+\infty$, donc pour $M \in \mathbb{R}$, obtenir APCR $u_n + v_n > M$. Mais pour tout n, $u_n + v_n \geqslant m + v_n$. Il suffit donc d'écrire APCR que $v_n > M - m$.

Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme u est minorée, il existe $m \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$. Puisque v tend vers $+\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on a $v_n > M - m$. Donc pour tout $n \geqslant N$, $u_n + v_n \geqslant m + v_n > m + M - m = M$. Ainsi $u + v$ tend vers $+\infty$.

Notez que nous avons utilisé ici dans l'assertion définissant le fait de tendre vers $+\infty$ le quantificateur "$\forall M \in \mathbb{R}$", au lieu de "$\forall M > 0$" comme dans les précédentes questions. Si on avait choisi $M > 0$, alors possiblement $M - m < 0$ ce qui pose des soucis de cohérences. Le "$\forall M \in \mathbb{R}$" permet de lever tous ces problèmes.