Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 2ème année, Mathématiques et Applications, 2023-2024
Analyse 3

Correction partielle Exercice 5 Feuille no2

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. On note $\mathrm{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ la fonction partie entière.

1. On suppose que $\ell \in]0,1[$. Montrer que la suite $(\mathrm{E}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. En déduire la limite de $(\mathrm{E}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ quand plus généralement $\ell \notin \mathbb{Z}$.
3. On considère le cas particulier $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n+2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a) Étudier la convergence de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b) Montrer que $(\mathrm{E}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite divergente.

Correction.

1.

2.

3. a)

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n est impair alors $0 < u_n < 1$, donc $E(u_n) = 0$. Si n est pair alors $1 < u_n < 2$, donc $E(u_n) = 1$. Montrons alors que la suite $(E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger, donc diverge par définition.

On peut raisonner de plusieurs manières.

— Tout d'abord en utilisant un résultat du cours du Chapitre 2 provenant de la partie concernant les suites extraites (pas encore traitée au moment de ce TD). C'est ce que nous avons fait, pour gagner du temps, en classe. Ce résultat affirme qu'une suite qui admet au moins deux sous suites qui convergent vers des valeurs différentes (on dit que la suite admet deux valeurs d'adhérence distinctes) ne peut être convergente. Une fois ce résultat vu, nous procèderons (sauf cas exceptionnels) toujours via cette méthode qui est très rapide et efficace. C'est grâce à cette proposition que l'on peut démontrer très rapidement que la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

— Montrer que la suite $(E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la définition d'une suite divergente.

— Raisonner par l'absurde en supposant que la suite $(E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ et obtenir une contradiction. Cette preuve va beaucoup ressembler, dans les arguments avancés, à celle du point précédent.

Détaillons la deuxième méthode (que vous devez savoir faire !) et la troisième est laissée à titre d'excellent entraînement.

$(E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la définition d'une suite divergente

Rappel : une suite réelle $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente si et seulement si elle n'est pas convergente. Or v est convergente si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, ce qui se réécrit

$$\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Par conséquent, par négation de cette assertion, on a v divergente si et seulement si

$$\forall \ell \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \geqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Montrons donc que $(E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait cette assertion.

Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

— Si $\ell \notin \{0,1\}$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\subset \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Soit $N \in \mathbb{N}$, alors pour $n = N$, on a $E(u_n) \notin]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ car sinon comme $E(u_n)$ vaut 0 ou 1, on aurait $0 \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\subset \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ ou $1 \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\subset \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, ce qui est impossible. Or $E(u_n) \notin]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ se réécrit de manière équivalente $|E(u_n) - \ell| \geqslant \varepsilon$. On a donc bien montré dans cette première situation que $(E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait (1).

— Sinon $\ell \in \{0,1\}$. Supposons dans un premier temps $\ell = 0$. Posons $\varepsilon = 1$. Soit $N \in \mathbb{N}$, alors pour $n = 2N \geqslant N$, on a $E(u_n) = 1$ et donc $|E(u_n) - \ell| = |1 - 0| \geqslant \varepsilon$.
Le cas $\ell = 1$ se traite de manière très similaire. C'est laissé en entraînement !
De nouveau nous avons donc bien montré que $(E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait (1).

Bilan : nous avons prouvé que

$$\forall \ell \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ |E(u_n) - \ell| \geqslant \varepsilon.$$

Ainsi $(E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.