Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 2ème année, Mathématiques et Applications, 2023-2024
Analyse 3

Feuille de TD n°2

Suites réelles et complexes : convergence, limites et inégalités.

Exercice 1

On note E : $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ la fonction partie entière. On rappelle qu'elle est caractérisée par la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x) + 1.$$

1. Tracer les graphes de E et de $x \mapsto E(\cos(x))$.

   Soient $d \in \mathbb{N}$ et u et v les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2 - \frac{3}{n}$ et $v_n = 10^{-d} E(10^d u_n)$.
2. Étudier le comportement de u à partir de celui de $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en détaillant les opérations sur les suites utilisées.
3. Étudier v pour $d = 0$. *Indication : donner l'allure des représentations graphiques de u et v.*
4. Étudier v pour $d = 1$. *Indication : raisonner à partir de la suite $10u$.*
5. On revient à d un entier naturel quelconque. Montrer que v est une suite stationnaire et donner sa limite.

Exercice 2

Soient $\varepsilon > 0$ et $M \in \mathbb{R}$. Déterminer dans chacun des cas suivants le plus petit rang à partir duquel la propriété énoncée est vraie ou le plus grand rang jusqu'au quel la propriété énoncée est vraie.

1. $|u_n| < \varepsilon$, avec $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.
2. $u_n \geqslant M$, avec $u_n = 4 - n^2$.
3. $|u_n - \frac{\pi}{2}| < \varepsilon$, avec $u_n = \arctan n$.
4. $u_n \geqslant 0$, avec $u_n = \cos(\frac{M}{n})$.

Exercice 3 (Cours : stabilité des notions de bornitude et monotonie)

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et u, v deux suites réelles.

1. Montrer que si u et v sont majorées alors $u + v$ est aussi majorée.
2. Montrer que si $\lambda \leqslant 0$ et u est majorée alors λu est minorée.
3. Montrer que si u et v sont bornées alors uv est aussi bornée.
4. Montrer que si u et v sont décroissantes à partir d'un certain rang, alors $u + v$ est également décroissante à partir d'un certain rang.

Exercice 4

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer dans chacun des cas suivants que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite

1. On suppose que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ |u_n - \ell| < \alpha\varepsilon\,.$$
2. On suppose que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon > 5,\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ |3u_n - \ell|^2 < \varepsilon\,.$$
3. On suppose que
$$\forall M > 1,\ \exists A \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \geqslant A,\ |u_n - \ell| < 1/M\,.$$

Exercice 5
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. On note $\mathrm{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ la fonction partie entière.

1. On suppose que $\ell \in]0,1[$. Montrer que la suite $(\mathrm{E}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. En déduire la limite de $(\mathrm{E}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ quand plus généralement $\ell \notin \mathbb{Z}$.
3. On considère le cas particulier $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n+2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a) Étudier la convergence de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b) Montrer que $(\mathrm{E}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite divergente.

Exercice 6 (Cours : opérations sur les suites convergentes)
Soit u et v deux suites réelles convergentes de limites respectives $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$.
2. Montrer que la suite produit $uv = (u_n v_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente de limite $\ell\ell'$.
3. Supposons de plus $\ell' \neq 0$, alors montrer :
   a) v est non nulle à partir d'un certain rang,
   b) la suite inverse de terme général $\frac{1}{v_n}$ est bien définie à partir d'un certain rang et est convergente, de limite $\frac{1}{\ell'}$,
   c) la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ est bien définie à partir d'un certain rang et est convergente, de limite $\frac{l}{\ell'}$.

Exercice 7 (Théorème de Cesàro)
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On considère la suite $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

1. Que représente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le terme S_n ?
2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   a) Montrer que S est bornée.
   b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ et $M_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, tels que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, on ait
   $$|S_n| < \frac{M_\varepsilon}{n} + \varepsilon.$$
   c) En déduire que S converge vers 0.
3. On suppose maintenant que u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que S converge aussi vers ℓ. Commenter.
4. On suppose que $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que dire de S ? Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 8 (Cours : opérations sur les suites divergentes)
Soit u et v deux suites réelles.

1. Montrer que si u converge vers $\ell > 0$ et v tend vers $+\infty$, alors le produit uv tend vers $+\infty$.
2. Si u tend vers $+\infty$ et v tend vers $-\infty$, alors uv tend vers $-\infty$.
3. Si u converge vers ℓ et si v tend vers $+\infty$, alors la suite des quotients $\frac{u}{v} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bien définie à partir d'un certain rang et est une suite convergente, de limite 0.
4. Soit u et v deux suites réelles. Si u est minorée et si v tend vers $+\infty$, alors $u + v$ tend vers $+\infty$. En particulier, si u est convergente et si v tend vers $+\infty$, alors $u + v$ tend vers $+\infty$.

Exercice 9
Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

1. Le produit de deux suites monotones est monotone.

2. Si l'assertion suivante est satisfaite pour une suite u et un réel ℓ donnés

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon,$$

alors la suite u est constante.

3. Une suite réelle positive est soit convergente, soit tend vers $+\infty$.

4. Si les suites u et v ne sont pas bornées alors la suite uv n'est pas bornée.

5. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers 1 alors tous ses termes sont positifs.

6. Si l'assertion suivante est satisfaite pour une suite u et un réel ℓ donnés

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_\varepsilon, |u_n - \ell| < \varepsilon,$$

alors la suite u est bornée.

7. Si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ou $-\ell$.

8. Si la suite $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

9. Toute suite convergente peut s'écrire comme la somme de deux suites divergentes.

10. Si l'assertion suivante est satisfaite pour une suite u et un réel ℓ donnés

$$\exists \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_\varepsilon, |u_n - \ell| < \varepsilon,$$

alors la suite u est bornée.

11. Si v est une suite de réels strictement positifs tendant vers 0 et u est une suite convergeant vers $\ell \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est une suite non bornée.

12. Si la suite u n'est pas majorée alors elle a pour limite $+\infty$.

13. Si l'assertion suivante est satisfaite pour une suite u et un réel ℓ donnés

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists n \geqslant N, |u_n - \ell| < \varepsilon,$$

alors la suite u est stationnaire.

14. Toute suite positive qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

Exercice 10 (Cours : caractérisation séquentielle de la borne supérieure)
Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$.

1. Montrer l'équivalence entre
   (1) $S = \sup(A)$.
   (2) a) S est un majorant de A,
       b) il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers S.

2. Application. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction majorée. Montrer qu'il existe une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$. Donner un exemple d'une fonction f et d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente mais satisfaisants l'assertion précédente.

Exercice 11 (Le retour des séries)
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

1. Rappeler ce que signifie le fait que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, puis diverge.

2. Montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, alors son reste, i.e. la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, converge vers 0.

3. On suppose maintenant que u et v sont des suites à termes positifs et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.
   a) Montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
   b) Montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_v$ diverge.
   c) Ces résultats sont-ils encore vraies si les hypothèses sur u et v ne sont valables qu'à partir d'un certain rang ?

Exercice 12
Soient $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ et $p \geqslant q > 0$. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{pu_n + qv_n}{p+q} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{qu_n + pv_n}{p+q}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, interpréter u_{n+1} et v_{n+1} en terme de moyennes et en déduire un encadrement (pour chacun).
2. Étudier les suites $u + v$ et $u - v$.
3. Montrer que les suites u et v sont adjacentes.
4. En déduire leur limite.

Exercice 13
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = 1 - (x + x^2 + \ldots + x^n)$.

1. On souhaite étudier le comportement des zéros de P_n sur $\mathbb{R}_+$.
   a) Tracer sur $\mathbb{R}_+$ l'allure du graphe de $Q_n : x \mapsto x + x^2 + \ldots + x^n$ (pour un n assez grand). En déduire celui de P_n. Conjecturer le nombre de zéro de P_n sur $\mathbb{R}_+$.
   b) Étudier les variations de P_n sur $[0, +\infty[$.
   c) En déduire qu'il existe un unique $u_n > 0$ tel que $P_n(u_n) = 0$.
2. On note, à partir de maintenant, $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par la propriété : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et $P_n(u_n) = 0$. On souhaite montrer que u converge.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1}(u_n) < P_{n+1}(u_{n+1})$.
   b) En déduire que u est strictement décroissante.
   c) En déduire que u est convergente.
3. On souhaite déterminer la limite de u.
   a) Calculer u_2. En déduire alors que $u_n^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   b) Rappeler comment calculer $\sum_{k=0}^{n} r^n$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2(1-u_n) = 1 - u_n^{n+1}$.
   c) En déduire la limite de u.