Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2024-2025
Analyse 3

Feuille de TD n°1

Langage mathématique, propriétés des réels.

Les questions ou exercices annotés par un ♣ sont d'un niveau plus difficile que celui attendu pour l'examen.

Exercice 10

Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants.

1. $A = [0, 1[$.
2. $A =]-1, 1] \cup \{\pi\}$.
3. ♣ $A = \{\|(x, y, z)\| \,/\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x| < 1, |y| < 1, |z| < 1\}$.

Correction.

1. Pour tout $x \in A$, $0 \leqslant x < 1$ et $0 \in A$, donc $\min(A) = 0$, et A admet une borne inférieure et $\inf(A) = \min(A)$.
On intuite que A n'admet pas de maximum puisque $1 \notin A$. Puisque A est majoré et non vide, par le théorème d'existence de la borne supérieure $\sup(A)$ existe. Montrons que $\sup(A) = 1$. On raisonne par double inégalité.
Par définition : $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A.
Comme 1 est un majorant de A, et $\sup(A)$ est le plus petit d'entre eux, on déduit $\sup(A) \leqslant 1$.
Notons $y = \sup(A)$ et montrons que $y \geqslant 1$. Supposons par l'absurde que $y < 1$.
On souhaite obtenir une contradiction concernant $y(= \sup(A))$, donc soit obtenir que ce n'est pas un majorant, soit que ce n'est pas le plus petit des majorants. Comme on a intuité que $\sup(A) = 1$, on se doute que la contradiction a obtenir concerne le premier point. De plus on a déjà utilisé que y est le plus petit des majorants de A. Ainsi pour obtenir que y n'est pas un majorant, on peut construire $\underline{x \in A}$ tel que $y < x$. Sensibiliser graphiquement à la difficulté de devoir minorer y pour garantir que le point médian est dans A.
Construisons $\underline{x \in A}$ tel que $y < x < 1$. Si $y < 0$, $x = 0$ convient. Si $y \geqslant 0$, alors le point médian entre y et 1, $x = (y + 1)/2$, convient car on a bien $x \in A$ puisque A est un intervalle. Ainsi, l'existence de x contredit le fait que y soit un majorant de A et donc $y \geqslant 1$. Finalement, $\sup(A) = 1$.
Utilisons la propriété : si A admet un maximum, alors $\sup(A) = \max(A) \in A$.
Supposons par l'absurde que A admette un maximum. Alors on aurait $\sup(A) = \max(A)$ et donc $\sup(A) = 1 \in A$. Contradiction. Donc A n'admet pas de maximum.

2. Pour tout $x \in A$, $-1 < x \leqslant \pi$ et $\pi \in A$, donc $\max(A) = \pi$ et A admet une borne supérieure et $\sup(A) = \max(A) = \pi$.
On intuite que A n'admet pas de minimum puisque $-1 \notin A$. Puisque A est minoré et non vide, $\inf(A)$ existe. Montrons que $\inf(A) = -1$. On raisonne par double inégalité.
Par définition : $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A.
Comme -1 est un minorant de A et $\inf(A)$ est le plus grand d'entre eux, on a donc $-1 \leqslant \inf(A)$.
Notons $y = \inf(A)$ et montrons que $-1 \geqslant y$. Supposons par l'absurde que $-1 < y$. Construisons $x \in A$ tel que $-1 < x < y$. Remarquons que si $y > 1$, alors $x = 0$ convient. Sinon, considérons le point médian entre -1 et y, $x = \frac{-1+y}{2}$, alors $-1 < x < y \leqslant 1$, donc $x \in A$ (comme l'intervalle $]-1, 1] \subset A$) et $x < y$. Ceci est une contradiction avec le fait que y est un minorant de A, d'où $-1 \geqslant y$ et $\inf(A) = -1$.
Utilisons la propriété : si A admet un minimum, alors $\inf(A) = \min(A) \in A$.
Puisque $-1 = \inf(A) \notin A$, il en résulte (par l'absurde) que A n'admet pas de plus petit élément.

3. Pour tout $a \in A$, $0 \leqslant a < \sqrt{3}$. On a $0 = \|(0, 0, 0)\| \in A$ donc $\min A = \inf A = 0$ A est non vide et majoré donc $\sup A$ existe d'après le théorème d'existence de la borne supérieure et $\sup A \leqslant \sqrt{3}$. Notons $y = \sup A$ et supposons par l'absurde que $y < \sqrt{3}$. Indication : on peut se placer sur la grande diagonale de ce cube. Pour tout $x \in [0, 1[$, $\|(x, x, x)\| = \sqrt{3x^2} \in A$ et $\sqrt{3x^2} \underset{x \to 1}{\longrightarrow} \sqrt{3}$ donc il existe $x_0 \in [0, 1[$ tel que $y < \sqrt{3x_0^2} < \sqrt{3}$. Ainsi, y n'est pas un majorant de A car $\|(x_0, x_0, x_0)\| \in A$ d'où $y \geqslant \sqrt{3}$. Finalement, $\sup A = \sqrt{3}$. Puisque $\sup A \notin A$, A n'admet pas de maximum.