Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2023-2024
ANALYSE 3

Feuille de TD n°1

Propriétés des réels.

Les questions ou exercices annotés par un ♣ sont d'un niveau plus difficile que celui attendu pour l'examen.

Exercice 10

Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de $A = \{u_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \begin{cases} 2^n, & \text{si } n \text{ pair} \\ 2^{-n}, & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Correction.
Distinguons bien $\{u_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$, l'ensemble des termes de la suite, de la suite elle-même généralement notée $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (et u_n seul qui est un nombre, un terme isolé de la suite). Par exemple, $v = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite alternant entre les valeurs 1 et -1 et $\{v_n \,/\, n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$ est un ensemble à deux éléments.
Graphiquement : $A = \{\dots, \frac{1}{2^5}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2}\} \cup \{1, 2^2, 2^4, \dots\}$. On intuite en particulier que A est minorée par 0 mais n'est pas majorée (donc pas de sup) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant +\infty$.
Supposons par l'absurde qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ un majorant de A. Comme $u_{2n} = 2^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{2n_0} > M$. Comme $u_{2n_0} \in A$, ceci contredit le fait que M est un majorant de A. Donc A n'est pas majoré et n'admet donc pas de borne supérieure.
0 est un minorant de A et A est non vide, donc $\inf(A)$ existe d'après la propriété de la borne inférieure et $\inf(A) \geqslant 0$. Montrons que $\inf(A) = 0$. Notons $y = \inf(A)$ et supposons par l'absurde que $y > 0$. Comme $u_{2n+1} = 2^{-(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{2n_0+1} < y$. Comme $u_{2n_0+1} \in A$, y n'est donc pas un minorant de A, c'est absurde. D'où $y \leqslant 0$ et finalement $\inf(A) = 0$.

Exercice 13

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $A \subset B$ alors $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.
2. Montrer que $A \cup B$ est majorée, puis que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
3. Supposons $A \cap B \neq \varnothing$. Démontrer que $A \cap B$ est majorée, puis que $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup(A), \sup(B))$.
   Donner un exemple pour lequel l'inégalité est stricte.

Correction.
Remarquons tout d'abord que puisque A et B sont non vides et majorées, ils admettent des bornes supérieures.

1. Par définition : $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A.
   Par définition $\sup(B)$ est un majorant de B et comme $A \subset B$, c'est également un majorant de A. Or $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A donc $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.

2. On raisonne par double inégalité.

   Par définition : $\sup(A \cup B)$ est le plus petit des majorants de $A \cup B$.
   ($\leqslant$) A est majorée par $\sup(A)$, B est majorée par $\sup(B)$, donc $A \cup B$ est majorée par $\max(\sup(A), \sup(B))$. En effet, soit $x \in A \cup B$. Alors $x \in A$ ou $x \in B$. Si $x \in A$, alors $x \leqslant \sup(A) \leqslant \max(\sup(A), \sup(B))$. Sinon si $x \in B$, alors $x \leqslant \sup(B) \leqslant \max(\sup(A), \sup(B))$. Ainsi $\max(\sup(A), \sup(B))$ est un majorant de $A \cup B$. Comme $\sup(A \cup B)$ est le plus petit des majorants de $A \cup B$, alors $\sup(A \cup B) \leqslant \max(\sup(A), \sup(B))$.

(⩾) Il nous reste à montrer l'autre inégalité. Comme $A \subset A \cup B$, on a par 1., $\sup(A) \leqslant \sup(A \cup B)$. De même $\sup(B) \leqslant \sup(A \cup B)$. Donc $\max(\sup(A), \sup(B)) \leqslant \sup(A \cup B)$.

3. On a $A \cap B \subset A \cup B$. Et comme $A \cup B$ est majorée, c'est donc aussi le cas de $A \cap B$, qui est de plus une partie non vide, donc admet une borne supérieure.

Comme $A \cap B \subset A$, on a par 1. $\sup(A \cap B) \leqslant \sup(A)$. De même, $\sup(A \cap B) \leqslant \sup(B)$. Donc $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup(A), \sup(B))$. L'inégalité est stricte lorsque par exemple $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 3\}$.

Exercice 15

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

1. Soit $A + B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists a \in A, \exists b \in B, x = a + b\}$. Exprimer $\sup(A + B)$ en fonction de $\sup(A)$ et $\sup(B)$.

2. Soit $A \cdot B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists a \in A, \exists b \in B, x = ab\}$. A-t-on $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \sup(B)$?

Correction.
Remarquons tout d'abord que puisque A et B sont non vides et majorées, ils admettent des bornes supérieures.

1. Exemples : Si $A = [0, 1]$, $B = \{1\}$, alors $A + B = [1, 2]$. Si $A = [0, 1]$, $B = [2, 3]$, alors $A + B = [2, 4]$. On intuite donc que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

> Montrons cette égalité en utilisant la caractérisation de la borne supérieure.

Rappelons la caractérisation de la borne supérieure appliquée à la partie $A + B$. Notons $M = \sup(A) + \sup(B)$. On a l'équivalence entre :

— $\sup(A + B) = M$.

— M est un majorant de $A + B$. De plus pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A + B$ tel que $M - \varepsilon < x$.

Montrons que $M = \sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A + B$. Soit $x \in A + B$, alors il existe donc $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$ et on a $x = a + b \leqslant \sup(A) + \sup(B)$, car $\sup(A)$ et $\sup(B)$ sont des majorants de A et B.

Soit $\varepsilon > 0$, alors d'après la caractérisation de la borne supérieure pour A, respectivement pour B, il existe $a \in A$, respectivement $b \in B$, tels que $\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} < a \leqslant \sup(A)$, resp. $\sup(B) - \frac{\varepsilon}{2} < b \leqslant \sup(B)$. En sommant les inégalités membre à membre, on obtient

$$M - \varepsilon < \underbrace{a + b}_{\in A+B}.$$

On déduit donc bien d'après la caractérisation de la borne supérieure (appliquée à $A+B$) que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

2. Non. Les contre-exemples viennent des nombres négatifs. Par exemple si $A = \{-1\}$ et $B = \{0, 1\}$, alors $\sup(A) = -1$, $\sup(B) = 1$. Et $A \cdot B = \{-1, 0\}$, d'où $\sup(A \cdot B) = 0$. *Voir la feuille d'exercices d'annales pour l'étude de l'égalité lorsque $A, B \subset \mathbb{R}_+$.*

Exercice 16

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée. On note $-A$ l'ensemble

$$-A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists a \in A, x = -a\}.$$

1. Montrer que $-A$ est non vide, majorée, et que $\sup(-A) = -\inf(A)$.

2. Soit B l'ensemble des minorants de A. Montrer que $B \neq \varnothing$, puis est majorée et enfin que $\sup(B) = \inf(A)$.

Correction.
Exemples : si $A = [1, 2]$, $-A = [-2, -1]$; si $A = [1, +\infty[$, $-A =]-\infty, -1]$.

> Boîte à outils : définitions minorant/minoré et majorant/majoré ;
> définitions et propriétés des bornes inférieures et supérieures ;
> on montre les égalités par double inégalité.

1. $-A$ est non vide car A est non vide : $\exists a \in A$ d'où $-a \in -A$.
$-A$ est majorée car A est minorée : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall a \in A, m \leqslant a$ or $\forall x \in -A, \exists a \in A, x = -a$ d'où $x = -a \leqslant -m$.
D'après la propriété de la borne supérieure, on en déduit que $-A$ admet une borne supérieure. De même, A admet bien une borne inférieure. De plus, on vient de montrer que pour tout minorant m de A, $-m$ est un majorant de $-A$ donc $-\inf(A)$ est un majorant de $-A$ d'où $\sup(-A) \leqslant -\inf(A)$.
L'inégalité inverse s'obtient en remarquant que de même, pour tout majorant M de $-A$, $-M$ est un minorant de A donc $-\sup(-A)$ est un minorant de A d'où $-\sup(-A) \leqslant \inf(A)$, *i.e.* $\sup(-A) \geqslant -\inf(A)$.
Ainsi, $-\sup(-A) = \inf(A)$.
La fonction $-\mathrm{Id}$ établit une bijection entre A et $-A$, ainsi qu'entre l'ensemble des minorants de A et l'ensemble des majorants de $-A$.

2. A est minorée donc admet un minorant, d'où B est non vide. Comme A admet une borne inférieure qui est par définition le plus grand des minorants de A, B est donc majorée par $\inf(A)$. Donc B admet une borne supérieure et $\sup(B) \leqslant \inf(A)$. Ensuite $\inf(A)$ est un minorant de A, donc $\inf(A) \in B$. D'où $\inf(A) \leqslant \sup(B)$. Par conséquent $\sup(B) = \inf(A)$.

Exercice 17

Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ d'au moins deux éléments et x un élément de A.

1. Montrer que si $x < \sup(A)$, alors $\sup(A \setminus \{x\}) = \sup(A)$.
2. Montrer que la contraposée de la précédente implication s'écrit :
$$\sup(A \setminus \{x\}) < \sup(A) \quad \Rightarrow \quad x = \sup(A).$$
3. La réciproque de 1. est-elle vraie ?

Correction.
Remarquons tout d'abord que comme A contient au moins deux éléments et est majorée, $A \setminus \{x\}$ est non vide et majorée donc admet une borne supérieure. De même A admet une borne supérieure.

1. > Première méthode : on utilise la caractérisation de la borne supérieure appliquée à $A \setminus \{x\}$.

Posons $M = \sup(A)$.

Rappelons la caractérisation de la borne supérieure appliquée à $A \setminus \{x\}$. On sait déjà que $A \setminus \{x\}$ admet une borne supérieure, donc on a l'équivalence entre :

— $\sup(A \setminus \{x\}) = M$.

— M est un majorant de $A \setminus \{x\}$. De plus pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $b \in A \setminus \{x\}$ tel que $M - \varepsilon < b$.

On a $A \setminus \{x\} \subset A$, donc M est un majorant de $A \setminus \{x\}$ comme s'en est un de A.

Soit $\varepsilon > 0$. L'idée est d'appliquer la caractérisation de la borne supérieure à A pour obtenir l'existe d'un b vérifiant $M - \varepsilon < b$. Mais b appartient a priori à A, alors qu'il faudrait qu'il soit dans $A \setminus \{x\}$ pour conclure comme souhaité. Il faut donc s'assurer $b \neq x$. Or comme $x < M$ par hypothèse de l'énoncé, si ε est suffisamment petit alors on peut se retrouver dans la situation $x \leqslant M - \varepsilon < b \leqslant M$ et donc $x \neq b$. Ne pas hésiter à faire un dessin en représentant la droite réelle et en plaçant ces différentes quantités. On voit donc que l'on est ramené à distinguer les cas $x \leqslant M - \varepsilon$ et $M - \varepsilon < x$. Rédigeons !

Supposons que $x \leqslant M - \varepsilon$. Alors d'après la caractérisation de la borne supérieure appliquée à A, il existe $b \in A$ tel que $M - \varepsilon < b$. Ainsi $x \leqslant M - \varepsilon < b (\leqslant M)$, d'où $x < b$, i.e. $b \in A \setminus \{x\}$. Finalement d'après la caractérisation séquentielle appliquée à $A \setminus \{x\}$, on obtient bien $\sup(A \setminus \{x\}) = M$.

Sinon on est dans la situation $M - \varepsilon < x$. Si pour tout $a \in A$ on a $a \leqslant x$, alors $x = \max(A) = \sup(A)$, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. Donc il existe $b \in A$ tel que $x < b$. Ainsi $b \in A \setminus \{x\}$ et $M - \varepsilon (< x) < b$. De nouveau par la caractérisation séquentielle appliquée à $A \setminus \{x\}$, on obtient bien $\sup(A \setminus \{x\}) = M$.

Deuxième méthode : on raisonne par double inégalité.

($\leqslant$) Tout d'abord on remarque que $\sup(A \setminus \{x\}) \leqslant \sup(A)$, car $A \setminus \{x\} \subset A$ (cela a déjà été vu dans l'exercice 13).

($\geqslant$) Montrons que $\sup(A) \leqslant \sup(A \setminus \{x\})$. Montrons que $\sup(A \setminus \{x\})$ est un majorant de A. Soit $a \in A$. Si $a \neq x$, alors $a \in A \setminus \{x\}$ et $a \leqslant \sup(A \setminus \{x\})$. Sinon $a = x$. Posons $\varepsilon = \frac{\sup(A)-x}{2} > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe $b \in A$ tel que $\sup(A) - \varepsilon < b \leqslant \sup(A)$. Or $\sup(A) - \varepsilon = x + \varepsilon > x$. Donc $b > x$, et en particulier $b \in A \setminus \{x\}$. On a ainsi $a = x < b \leqslant \sup(A \setminus \{x\})$. Par conséquent on a montré que dans tous les cas

$$a \leqslant \sup(A \setminus \{x\}).$$

Ceci conclut la preuve.

2. La contraposée s'écrit

$$\sup(A \setminus \{x\}) \neq \sup(A) \quad \Rightarrow \quad x \geqslant \sup(A).$$

Or on sait que $\sup(A \setminus \{x\}) \leqslant \sup(A)$ est toujours vraie, donc $\sup(A \setminus \{x\}) \neq \sup(A)$ se réécrit $\sup(A \setminus \{x\}) < \sup(A)$. De plus, $x \leqslant \sup(A)$ est toujours vraie, donc $x \geqslant \sup(A)$ se réécrit $x = \sup(A)$. La contraposée de l'implication vu en 1. est donc bien

$$\sup(A \setminus \{x\}) < \sup(A) \quad \Rightarrow \quad x = \sup(A).$$

Cette assertion est vraie puisque l'implication en 1. a été prouvée comme juste.

3. La réciproque de 1. qui s'écrit

$$\sup(A \setminus \{x\}) = \sup(A) \quad \Rightarrow \quad x < \sup(A),$$

est fausse. Donnons un contre-exemple. Prenons $A = [0,1]$ et $x = 1$. Alors $A \setminus \{x\} = [0,1[$ et $\sup(A \setminus \{x\}) = 1 = \sup(A)$. Et pourtant la conclusion $x < \sup(A)$ puisque ici $x = 1 = \sup(A)$.

Exercice 19

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On pose $B = \{|x-y| \,/\, x, y \in A\}$. Ainsi B est l'ensemble de toutes les distances entre deux points quelconques de A.

1. Montrer que $\sup(B)$ existe. On appelle ce réel diamètre de A et on notera $\mathrm{Diam}(A) = \sup(B)$.
2. Montrer que $\mathrm{Diam}(A) = 0$ si et seulement si A est un singleton.
3. Justifier que $\inf(A)$ et $\sup(A)$ existent, puis montrer que $\mathrm{Diam}(A) \leqslant \sup(A) - \inf(A)$.
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x, y \in A$ tels que $\sup(A) - \inf(A) - \varepsilon < x - y$.
5. En déduire finalement que $\mathrm{Diam}(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

Correction.

1. B est non vide car A est non vide. De plus B est bornée car pour tous $x, y \in A$, $|x-y| \leqslant |x| + |y|$ par l'inégalité triangulaire, donc $|x-y| \leqslant 2M$. Par la propriété de la borne supérieure, $\sup(B)$ existe.

2. On raisonne par double implication.

Le sens indirect est facile : si $A = \{x\}$ avec $x \in \mathbb{R}$, alors $B = \{0\}$. B admet donc un maximum qui est 0, d'où $\mathrm{Diam}(A) = \sup(B) = \max(B) = 0$.

Pour le sens direct, on peut raisonner par l'absurde. Alternativement, montrons la contraposée. Supposons que A n'est pas un singleton. Comme A est non vide, il existe donc $x, y \in A$ tel que $x \neq y$. Ainsi $\delta = |x-y| \in B$ avec $\delta > 0$. D'où $0 < \delta \leqslant \mathrm{Diam}(A)$, puisque $\sup(B) = \mathrm{Diam}(A)$ est un majorant de B.

3. A est non vide et bornée, donc minorée et majorée. Par propriété de la borne inférieure et supérieure, $\inf(A)$ et $\sup(A)$ existent.

Pour l'inégalité, comme $\mathrm{Diam}(A)$ est le sup de B, l'idée classique est de montrer que $\sup(A) - \inf(A)$ majore B, i.e. pour tout $x, y \in A$, $|x-y| \leqslant \sup(A) - \inf(A)$. Il pourrait être alors tentant de commencer par appliquer l'inégalité triangulaire $|x-y| \leqslant |x| + |y|$ puis essayer de majorer $|x|$ et $|y|$ pour faire apparaître $\sup(A)$ et $-\inf(A)$. Mais $\sup(A)$ et $\inf(A)$ se comportent mal vis à vis de $|x|$ et $|y|$ car ils pourraient très bien être négatifs. Il faut être plus fin dans les majorations et plutôt chercher à travailler avec x et y plutôt que leurs valeurs absolues. On peut se rappeler que montrer $|x-y| \leqslant C$, pour un certain $C \geqslant 0$, est équivalent à montrer $-C \leqslant x - y \leqslant C$.

Pour tous $x, y \in A$, on a $x, y \leqslant \sup(A)$ et $\inf(A) \leqslant x, y$, car $\sup(A)$ et $\inf(A)$ sont respectivement un majorant et minorant de A. Ainsi $x - y \leqslant \sup(A) - y \leqslant \sup(A) - \inf(A)$. Puis $x - y \geqslant \inf(A) - y \geqslant \inf(A) - \sup(A)$. On a donc montré

$$-(\sup(A) - \inf(A)) \leqslant x - y \leqslant \sup(A) - \inf(A),$$

qui est équivalent à $|x - y| \leqslant \sup(A) - \inf(A)$. Par conséquent, $\sup(A) - \inf(A)$ est un majorant de B, d'où $\mathrm{Diam}(A) = \sup(B) \leqslant \sup(A) - \inf(A)$.

4. On pense à utiliser la caractérisation de la borne supérieure et inférieure.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe $x \in A$ tel que $\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} < x$. D'après la caractérisation de la borne inférieure, il existe $y \in A$ tel que $y < \inf(A) + \frac{\varepsilon}{2}$, i.e. $-\inf(A) - \frac{\varepsilon}{2} < y$. En sommant les inégalités, on obtient bien celle de l'énoncé.

5. L'idée est d'appliquer la caractérisation de la borne supérieure à B et montrer que $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

On a montré en 3. que $\sup(A) - \inf(A)$ est un majorant de B.

Soit $\varepsilon > 0$, d'après 4. il existe $x, y \in A$ tels que $\sup(A) - \inf(A) - \varepsilon < x - y$. Attention les éléments de B sont les $|x - y|$ et non les $x - y$. L'inégalité précédente n'est donc pas suffisante pour conclure grâce à la caractérisation de la borne supérieure appliquée à B, puisque $x - y$ n'est pas forcément dans B. Si $x - y \geqslant 0$, alors $x - y = |x - y|$ et $\sup(A) - \inf(A) - \varepsilon < \underbrace{|x - y|}_{\in B}$. Sinon $x - y < 0$ et $x - y < |x - y|$, d'où de nouveau $\sup(A) - \inf(A) - \varepsilon (< x - y) < |x - y|$. Ainsi, d'après la caractérisation de la borne supérieure appliquée à B, on obtient $\mathrm{Diam}(A) := \sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.