Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 2ème année, Mathématiques et Applications, 2024-2025
ANALYSE 3

Feuille de TD n°1

Langage mathématique, propriétés des réels.

Exercices complémentaires d'entraînement

1. Exercices corrigés : prise en main

Exercice 1
Soient A et B deux sous ensembles bornés de $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Donner la contraposée des assertions suivantes :

1. Si A admet un minimum, alors $\inf A \in A$.
2. Si A est inclus dans B, alors $\sup A \leqslant \sup B$.
3. Si A est l'image de B par f, alors f est bornée sur A.
4. Si A est non vide et majoré, A admet une borne supérieure.
5. Si f est monotone, alors f est croissante ou décroissante.

Correction.
On rappelle qu'une assertion "P implique Q" est vraie si et seulement si sa contraposée "non(Q) implique non(P)" est vraie. Il est parfois plus aisé de démontrer une assertion sous sa forme contraposée que sous sa forme initiale.

1. Si $\inf A \notin A$, alors A n'admet pas de minimum.
2. Si $\sup A > \sup B$, alors $A \subsetneq B$.
3. Si f n'est pas bornée sur A, alors $A \neq f(B)$.
   Pour rappel, $f(B) = \{f(x) \,/\, x \in B\}$ et f est bornée sur A s'écrit : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, |f(a)| \leqslant M$.
4. Si A n'admet pas de borne supérieure, alors A est vide ou non majoré.
5. Si f n'est ni croissante, ni décroissante, alors f n'est pas monotone.

Exercice 2
Soient A et B deux sous ensembles minorés de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \cup B$ est minoré.

Correction.
Par définition : A est minoré si et seulement si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall a \in A, m \leqslant a.$$

> Méthode : pour montrer l'existence d'un objet, on construit le plus souvent un candidat explicite.

Tâtonnements : Partons d'un exemple : $A = [0,1]$, $B = [1,2]$, $A \cup B = [0,2]$; 1 minore B mais pas $A \cup B$: un minorant de $A \cup B$ doit minorer A et B. Si on dispose d'un minorant de A et d'un minorant de B alors le minimum des deux sera un minorant de $A \cup B$.
Traduisons les hypothèses : Puisque A est minoré, il existe $m_A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $a \in A$, $m_A \leqslant a$. De même, puisque B est minoré, il existe $m_B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $b \in B$, $m_B \leqslant b$.
On aurait pu écrire ceci avec des quantificateurs : Puisque A et B sont minorés, on a

$$\exists m_A, m_B \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ \forall b \in B,\ m_A \leqslant a \ \text{ et } \ m_B \leqslant b\,.$$

Posons $m = \min(m_A, m_B)$ (m existe, c'est notre candidat) et montrons que m est un minorant de $A \cup B$, *i.e.* pour tout $x \in A \cup B$, $m \leqslant x$. En effet, soit $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ ou $x \in B$. Or, si $x \in A$, alors $m \leqslant m_A \leqslant x$ et si $x \in B$, alors $m \leqslant m_B \leqslant x$. Dans les deux cas, $m \leqslant x$ (donc m est bien un minorant de $A \cup B$). Ceci démontre que $A \cup B$ est minoré.

Exercice 3
Soient A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$ avec B majoré. Montrer que $A \cap B$ est majoré.

Correction.
Par définition : B est majoré si et seulement si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall b \in B, b \leqslant M.$$

Méthode : pour montrer l'existence d'un majorant de $A \cap B$, construisons un candidat explicite.

On peut comme précédemment s'aider d'un exemple pour remarquer que tout majorant de B est aussi un majorant de $A \cap B$. Rappelons que $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in A \text{ et } x \in B\}$.
On fait parler les hypothèses : Puisque B est majoré, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $b \in B$, $b \leqslant M$.
Alors pour tout $x \in A \cap B$, $x \leqslant M$ car $x \in B$. Ainsi, M est un majorant de $A \cap B$ et $A \cap B$ est bien majoré.

Exercice 4
Soit $(A_n)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \,.$$

Correction.
Soit $N \in \mathbb{N}$. Par définition : $\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists n \geqslant N, x \in A_n\}$. Montrons cette égalité par double inclusion.
($\subset$) Soit $x \in \bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n$. Il existe alors $n_0 \geqslant N$ tel que $x \in A_{n_0}$. Puisque $n_0 \geqslant 0$, $x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ d'où la première inclusion.
($\supset$) Soit $x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. Il existe alors $n_0 \geqslant 0$ tel que $x \in A_{n_0}$. Si $n_0 \geqslant N$, alors $x \in \bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n$. Sinon $x \in A_N$ car $A_{n_0} \subset A_N$ et donc $x \in \bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n$. En effet, montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $A_{n_0} \subset A_{n_0+k}$. Pour $k = 1$, on a bien d'après l'énoncé, $A_{n_0} \subset A_{n_0+1}$. Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons $A_{n_0} \subset A_{n_0+k}$, alors d'après l'énoncé, $A_{n_0+k} \subset A_{n_0+k+1}$ d'où $A_{n_0} \subset A_{n_0+k+1}$. Ceci achève la récurrence et on obtient en particulier pour $k = N - n_0$, $A_{n_0} \subset A_N$. Ceci montre la deuxième inclusion.
Finalement, $\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

Exercice 5
Soit $A \subset \mathbb{Z}$. On suppose que A est un ensemble infini. Montrer qu'il contient au moins soit une infinité d'entiers pairs, soit une infinité d'entiers impairs.

Correction.

Méthode : la déduction semble peu évidente à rédiger, on essaie un raisonnement par l'absurde.

Supposons par l'absurde que A contient un nombre fini d'entiers pairs **et** un nombre fini d'entiers impairs.
Montrons que A est fini, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. On peut introduire des variables et des notations pour expliciter le raisonnement.
Notons $A_p = \{a \in A \,/\, \text{a est pair}\}$ et $A_i = \{a \in A \,/\, \text{a est impair}\}$ les sous-ensembles de A contenant respectivement les éléments pairs et les éléments impairs. Puisque A_p et A_i sont supposés être des ensembles finis, notons $\#A_p$ et $\#A_i$ leurs cardinaux. Alors A_p et A_i sont disjoints et $A = A_p \sqcup A_i$ car $A \subset \mathbb{Z}$ et tout entier est soit pair soit impair. Ainsi, A est un ensemble fini dont le cardinal est donné par $\#A = \#(A_p \sqcup A_i) = \#A_p + \#A_i < \infty$. Contradiction.

Exercice 6
Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\min(x, y) \leqslant \dfrac{x+y}{2} \leqslant \max(x, y)$.

Correction.
On veut montrer que la moyenne de deux nombres réels est comprise entre le minimum et le maximum des deux.
Par définition : $\min(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant y \\ y & \text{si } x \geqslant y \end{cases}$ et $\max(x, y) = \begin{cases} y & \text{si } x \leqslant y \\ x & \text{si } x \geqslant y \end{cases}$.

Méthode : Pour s'alléger de l'indétermination sur les fonctions minimum, maximum et valeur absolue, on peut séparer l'étude selon les deux cas des définitions.

Si $x \leqslant y$, $\min(x, y) = x$, $\max(x, y) = y$. De plus, $x \leqslant y$ implique que $\frac{x+y}{2} \leqslant \frac{y+y}{2} = y$ et $\frac{x+y}{2} \geqslant \frac{2x}{2} = x$ d'où $\min(x, y) = x \leqslant \dfrac{x+y}{2} \leqslant y = \max(x, y)$.
Si $x \geqslant y$, alors $x + y \leqslant 2x = 2\max(x, y)$ et $x + y \geqslant 2y = 2\min(x, y)$. D'où $\min(x, y) \leqslant \frac{x+y}{2} \leqslant \max(x, y)$.
On obtient bien l'inégalité demandée dans les 2 cas.

Exercice 7 Caractérisation d'un ensemble borné.
Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que A est borné si et seulement si

$$\exists m, M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A, \quad m \leqslant a \leqslant M.$$

Correction.
On montre l'équivalence par double implication.
Par définition : un ensemble est borné s'il satisfait

$$\exists M_1 \in \mathbb{R},\ \forall a \in A, \quad |a| \leqslant M_1.$$

La notation M est déjà fixée dans l'énoncé donc on introduit une notation différente.
Puisqu'il n'y a pas de valeur absolue dans l'assertion de l'énoncé, on réécrira cette définition sans valeur absolue. Par définition : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ ou encore $|x| = \max(x, -x)$. En particulier, $x \leqslant |x|$ et $-x \leqslant |x|$.
($\Rightarrow$) Si A est borné, il existe M_1 tel que pour tout $a \in A$, $|a| \leqslant M_1$. On a donc pour tout $a \in A$, $a \leqslant M_1$ et $-a \leqslant M_1$ d'où $-M_1 \leqslant a$ et donc $-M_1 \leqslant a \leqslant M_1$. Alors pour $m = -M_1$ et $M = M_1$, on a bien

$$\forall a \in A, \quad m \leqslant a \leqslant M.$$

($\Leftarrow$) Réciproquement, soient $m, M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in A$, $m \leqslant a \leqslant M$. Alors $-M \leqslant -a \leqslant -m$ donc en posant $M_1 = \max(M, -m)$, on a $a \leqslant M_1$ et $-a \leqslant M_1$ d'où $|a| \leqslant M_1$. A est bien borné.

L'équivalence $|x| \leqslant y \iff -y \leqslant x \leqslant y$ est un résultat du cours que l'on peut utiliser sans justification. On en a refait la démonstration ici à titre d'entraînement.

Exercice 8

Donner, dans chacun des cas suivants et sans justification, des exemples de sous ensembles A et B de $\mathbb{R}$ distincts tels que

1. $\inf A = \inf B$ et $\sup A = \sup B$
2. $A \subsetneq B$, $B \subsetneq A$, $\inf A = \inf B$ et $\sup A = \sup B$
3. $\min A = \min B$ et $\max A = \max B$
4. $\sup(A \cap B) \geqslant \sup(A \cup B)$
5. $A \subset B$, $\sup A = \inf B$
6.* $A \cap B = \emptyset$, ni A, ni B n'est minoré.

Correction.

1. Par exemple, $A = [0, 1]$ et $B =]0, 1[$ ou $B = [0, 1[$.
2. $A = \{0\} \cup \{1\}$ et $B = [0, 1[$ ou $A =]0, 1[$ et $B = [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$.
3. $A = \{0\} \cup \{1\}$ ou $A = [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ et $B = [0, 1]$.
4. $A = [0, 1]$ et $B = [-1, 1]$. On pourrait montrer que $\sup(A \cap B) \leqslant \sup(A \cup B)$ car $(A \cap B) \subset (A \cup B)$, d'où nécessairement l'égalité ici.
5. $A = \{0\}$ et $B = [0, 1]$. On pourrait montrer que $\inf B \leqslant \inf A$ car $A \subset B$, d'où ici $\sup A = \inf B \leqslant \inf A$. Or, on a toujours $\inf A \leqslant \sup A$ d'où $\inf A = \sup A$ et donc A est nécessairement réduit à un point.
6. $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Ou encore $A = \{-2n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{-(2n+1) \,/\, n \in \mathbb{N}\}$.

2. Exercices corrigés : révisions et approfondissement

Exercice 9

Soient a et b deux réels distincts. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x - a| = |x - b|$.

Correction.
Interprétation : $|x - a|$ est la distance entre a et b. Ainsi, $x \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation si et seulement si x est à égale distance de a et de b, autrement dit x est le point médian entre a et b.
Méthode : pour ôter les valeurs absolues, on raisonne par cas.
Puisque l'on peut échanger a et b, supposons que $a < b$. Raisonnons par cas :

— Si $x \leqslant a$, alors $x \leqslant a < b$ donc $|x - a| = a - x < b - x = |b - x|$. x n'est donc pas solution.

— Si $a \leqslant x \leqslant b$, l'équation devient $x - a = b - x$, équivalente à $2x = a + b$, donc l'unique solution est $x = \frac{a+b}{2}$.

— Si $b \leqslant x$, alors $a < b \leqslant x$ donc $|x - a| = x - a > x - b = |b - x|$. x n'est donc pas solution.

L'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation est donc le point médian $x = \frac{a+b}{2}$.
Remarque : si $a = b$ alors tout $x \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation.

Exercice 10

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer qu'il existe $a', b' \in \mathbb{R}$ tels que $a' < b'$ et $[a', b'] \subset]a, b[$.

Correction.
Interprétation : en traçant les variables sur l'axe réel, on peut reformuler le problème. Il s'agit de montrer qu'il existe $a', b' \in \mathbb{R}$ tels que $a < a' < b' < b$.

Méthode 1 : pour montrer l'existence d'une variable, on en construit un candidat explicite.

Puisque $a < b$, en posant $a' = \frac{a+b}{2}$ (moyenne de a et b), on a $a < a' < b$. De même, en posant $b' = \frac{a'+b}{2}$, on a $a' < b' < b$. Ainsi, $a < a' < b' < b$ donc $[a', b'] \subset]a, b[$.

Méthode 2 : on utilise le lemme de réécriture.

Puisque $a < b$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a < a + \varepsilon < b$. Posons alors $a' = a + \varepsilon$. Puisque $a' < b$, il existe $\varepsilon' > 0$ tel que $a' < a' + \varepsilon' < b$. Posons alors $b' = a' + \varepsilon'$. On a bien $a < a' < b' < b$ donc $[a', b'] \subset]a, b[$.

Exercice 11
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$[a + \varepsilon, a + 2\varepsilon] \cap [b, +\infty[= \emptyset\,.$$

Correction.
Interprétation : en traçant les variables sur l'axe réel, on peut remarquer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a toujours $a < a + \varepsilon < a + 2\varepsilon$. Il s'agit de montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a + 2\varepsilon < b$ ou autrement dit, $[a + \varepsilon, a + 2\varepsilon] \subset]a, b[$.

Méthode 1 : pour montrer l'existence d'une variable, on en construit un candidat explicite.

Puisque $a < b$, notons $L = b - a$ la longueur du segment $[a, b]$. En posant $\varepsilon = \frac{L}{3}$, on a bien $\varepsilon > 0$ et $a < a + \varepsilon < a + 2\varepsilon = a + \frac{2}{3}L < a + L = b$ d'où l'existence d'un ε satisfaisant les conditions de l'énoncé.

Méthode 2 : on utilise le lemme de réécriture.

Puisque $a < b$, il existe $\varepsilon' > 0$ tel que $a < a + \varepsilon' < b$. Posons alors $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2}$ de sorte que $\varepsilon > 0$ et $a < a + \varepsilon < a + 2\varepsilon = a + \varepsilon' < b$ d'où l'existence d'un ε satisfaisant les conditions de l'énoncé.

Exercice 12
Soient $a, b, x \in \mathbb{R}$ tels que $x < a + b$. Montrer qu'il existe $x_a, x_b \in \mathbb{R}$ tels que $x_a < a$, $x_b < b$ et $x = x_a + x_b$.

Correction.
Méthode 1, on s'inspire d'un exemple : $a = 1$, $b = 2$ et $x = 2.9$ alors $x_a = 0.95$ et $x_b = 1.95$ conviennent ; l'écart de $\varepsilon = 0.1$ entre x et $a + b$ est partagé en deux écarts plus petits de 0.05.

Notons $\varepsilon = a + b - x$ l'écart entre x et $a + b$ de sorte que $\varepsilon > 0$. On peut alors poser $x_a = a - \varepsilon/2$ et $x_b = b - \varepsilon/2$. En effet, $x_a < a$, $x_b < b$ et $x_a + x_b = a + b - \varepsilon = x$.

Méthode 2 : l'hypothèse est une inégalité et on cherche à montrer une égalité. On utilise la caractérisation des relations d'ordre par le lemme de réécriture puis on isole x pour construire la décomposition recherchée.

Puisque $x < a + b$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x + \varepsilon = a + b$. Ainsi, $x = a + b - \varepsilon = (a - \varepsilon/2) + (b - \varepsilon/2)$. De sorte que $x_a = a - \varepsilon/2$ et $x_b = b - \varepsilon/2$ conviennent car $\varepsilon > 0$.

Exercice 13
Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :
1. $A = \{\min(|x|, 3) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$.
2. $A = \displaystyle\bigcup_{k \in \{0,1,2\}} \left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$.
3. $A = \{\cos(2x) \,/\, x \in \mathbb{R}_-\}$.

Correction.
1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\min(|x|, 3) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \leqslant 3 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases} = [0, 3]$ donc $A = [0, 3]$. Ainsi, pour tout $a \in A$, $0 \leqslant a \leqslant 3$. Or $0 \in A$ donc $\min A = \inf A = 0$ et $3 \in A$ donc $\max A = \sup A = 3$.
2. $A = [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \pi + \frac{\pi}{2}] \cup [2\pi, 2\pi + \frac{\pi}{2}]$. On a pour tout $a \in A$, $0 \leqslant a \leqslant 2\pi + \frac{\pi}{2}$. Or $0 \in A$ donc $\min A = \inf A = 0$ et $2\pi + \frac{\pi}{2} \in A$ donc $\max A = \sup A = 2\pi + \frac{\pi}{2}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $-1 \leqslant \cos 2x \leqslant 1$ donc pour tout $a \in A$, $-1 \leqslant a \leqslant 1$. Or $1 \in A$ car pour $x = 0$ on a $x \in \mathbb{R}_-$ et $\cos 2x = 1$ donc $\max A = \sup A = 1$ et $-1 \in A$ car pour $x = -\frac{\pi}{2}$ on a $x \in \mathbb{R}_-$ et $\cos 2x = -1$ donc $\min A = \inf A = -1$.
Attention à bien choisir x dans $\mathbb{R}_-$ pour montrer que les bornes sont atteintes.

Exercice 14 (Cours : Lien entre minimum et borne inférieure)
Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que A admet un minimum si et seulement si A admet une borne inférieure et $\inf(A) \in A$, auquel cas $\min(A) = \inf(A)$.

Correction.
Utilisons les définitions :

— m est le minimum de A si $m \in A$ et m est un minorant de A,

— $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A.

On montre l'équivalence par double implication.
($\Rightarrow$) Si A admet un minimum, alors A est minoré et non vide car $\min A \in A$ donc par la propriété de la borne inférieure, A admet une borne inférieure. Montrons que $\inf(A) = \min(A)$, ce qui impliquera immédiatement que $\inf A \in A$.

> Méthode : Pour montrer une égalité (ici $\inf(A) = \min(A)$), on peut raisonner par double inégalité.

($\leqslant$) Comme $\min(A)$ est un minorant et que $\inf(A)$ est le plus grand des minorants, on a $\min(A) \leqslant \inf(A)$.
($\geqslant$) Puisque $\inf(A)$ est un minorant de A et que $\min(A) \in A$, on a $\inf(A) \leqslant \min(A)$. D'où $\inf(A) = \min(A)$.

($\Leftarrow$) Si $\inf(A) \in A$, alors $\inf(A)$ étant un minorant de A, il satisfait la définition du minimum de A donc $\min(A)$ existe et vaut $\inf(A)$.

Exercice 15

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $A =]a, +\infty[$ et on note $\underline{\mathcal{M}}(A)$ l'ensemble des minorants de A.
Donner la définition ensembliste de $\underline{\mathcal{M}}(]a, +\infty[)$ puis déterminer cet ensemble.

Correction.
Par définition, $\underline{\mathcal{M}}(A) = \{m \in \mathbb{R} \,/\, m \text{ est un minorant de } A\} = \{m \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in A, m \leqslant x\}$ (attention, a est fixé par l'énoncé, on ne peut pas écrire pour tout $a \in A$ ici).
Montrons que $\underline{\mathcal{M}}(A) =]-\infty, a]$ par double inclusion.
($\subset$) Soit m un minorant de A et supposons par l'absurde que $m > a$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $a < a + \varepsilon < m$. Or $a + \varepsilon \in]a, +\infty[$, ce qui contredit que m soit un minorant de $A =]a, +\infty[$. Ainsi, $m \leqslant a$ et $\underline{\mathcal{M}}(A) \subset]-\infty, a]$.
($\supset$) Soit $y \in]-\infty, a]$. On a pour tout $x \in A$, $x > a \geqslant y$ donc $y < x$. Ainsi, y est un minorant de A.

Exercice 16

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall a \in A, \forall b \in B, \quad a \leqslant b.$$

Peut-on déduire les assertions suivantes :

1. $A \cap B = \emptyset$.
2. $B \neq \mathbb{R}$.
3. $\sup(A) \in B$.
4. $\forall b \in B$, $\sup(A) \leqslant b$.
5. $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.
6. $\inf(A) \leqslant \inf(B)$.

Correction.
Donnons des exemples : Si $A = [0, 1]$, $B = [2, 3]$ et $B = [1, 2]$ conviennent mais pas $B = [0.5, 2]$.
Sauf mention explicite, on attend pour tout exercice des réponses justifiées (par démonstration ou par construction de contre-exemples).

1. Non, $A = [0, 1]$ et $B = [1, 2]$ en est un contre-exemple.
Attention, l'assertion $A \cap B = \emptyset$ est parfois vraie (par exemple pour $A = [0, 1]$ et $B = [2, 3]$). En revanche, l'assertion "Si A et B vérifient les hypothèses de l'énoncé alors $A \cap B = \emptyset$" est fausse.

2. Oui. $A = \emptyset$ et $B = \mathbb{R}$ pourraient convenir si l'énoncé ne supposait pas A non vide.
En effet, puisque A est non vide, il existe $a \in A$ tel que pour tout $b \in B$, $a \leqslant b$ donc B est minoré par a. Pour montrer que $B \neq \mathbb{R}$, construisons un réel qui n'est pas dans B (*i.e.* montrons que $\mathbb{R}$ n'est pas inclus dans B). Par conséquent, $a - 1 \notin B$ donc $B \neq \mathbb{R}$.

3. Non. $A = [0, 1]$ et $B = [2, 3]$ en est un contre-exemple.

4. Oui. B étant non vide, A est majoré donc d'après la propriété de la borne supérieure, $\sup(A)$ existe car A est également non vide.
Par définition : $\sup(A)$ est le plus petit majorant de A.
L'hypothèse nous dit que tout élément de B est un majorant de A.
Soit $b \in B$. D'après l'hypothèse, on a pour tout $a \in A$, $a \leqslant b$. Donc b est un majorant de A, d'où $\sup(A) \leqslant b$.

5. Oui. A étant non vide, B est minoré donc d'après la propriété de la borne inférieure, $\inf B$ existe car B est également non vide.
Par définition : $\inf B$ est le plus petit majorant de B.
On a montré à la question précédente que pour tout $b \in B$, on a $\sup(A) \leqslant b$. D'où $\sup(A)$ est un minorant de B et donc $\sup(A) \leqslant \inf B$.

6. C'est un piège ! L'inégalité est vraie d'après 5. sous réserve que A admette une borne inférieure, auquel cas $\inf A \leqslant \sup A$. Cependant, $A =]-\infty, 0]$ et $B = [0, 1]$ donne un contre-exemple.

Exercice 17

Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 < 5\}$
2. $A = \{\det(M^2) \,/\, M \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})\}$.

Correction.

> Méthode : on commence par chercher un encadrement éventuel des éléments de A (aussi optimal que possible).

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 < 5 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{5}$ donc pour tout $x \in A$, $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$.
A est non vide et borné donc d'après la propriété de la borne supérieure et la propriété de la borne inférieure, A admet une borne inférieure et une borne supérieure.
On a $\sup(A) \leqslant \sqrt{5}$. Notons $y = \sup(A)$ et supposons par l'absurde que $y < \sqrt{5}$. Pour construire un élément de A non majoré par y, prenons le point médian entre y et $\sqrt{5}$. On a nécessairement $y > 0$, sinon y ne majore pas $1 \in A$. Posons alors $x = \frac{y+\sqrt{5}}{2}$, alors $0 < y < x < \sqrt{5}$ et l'élévation au carré étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, $x^2 < 5$. Ainsi $x \in A$ et $y < x$ donc y ne majore pas A. Contradiction. Finalement, $\sup(A) = \sqrt{5}$ et puisque $\sup(A) \notin A$, A n'admet pas de maximum.
De même, on a $\inf(A) \geqslant \sqrt{5}$. Notons encore $y = \inf(A)$ et supposons par l'absurde que $y > -\sqrt{5}$. On a nécessairement $y < 0$, sinon y ne minore pas $-1 \in A$. Posons alors $x = \frac{-\sqrt{5}+y}{2}$ alors $-\sqrt{5} < x < y < 0$ et l'élévation au carré étant décroissante sur $\mathbb{R}_-$, $x^2 < 5$. Ainsi, $x \in A$ et $y > x$ donc y ne minore pas A. Contradiction. Finalement, $\inf(A) = -\sqrt{5}$ et puisque $\inf(A) \notin A$, A n'admet pas de minimum.

2. On a pour tout $M \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, $\det(M^2) = \det(M)^2 \geqslant 0$. De plus, si $M = \alpha I_3$ avec I_3 la matrice identité, alors $\det(M) = \alpha^3$ et $\det(M^2) = \alpha^6$. On peut donc construire des matrices de déterminant aussi grand que l'on le souhaite. Ainsi, un premier encadrement de A est pour tout $a \in A$, $0 \leqslant a < +\infty$.
On a bien $0 \in A$ car la matrice nulle vérifie $\det(M^2) = 0$. Ainsi, A admet un minimum et donc une borne inférieure et on a $\min(A) = \inf(A) = 0$.
Supposons par l'absurde que A est majoré. Alors il existe $c \geqslant 0$ tel que $\forall a \in A$, $a \leqslant c$ donc $\forall M \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, $\det(M^2) \leqslant c$. Or en considérant $M = (c+1)I_3$, on a $\det(M^2) = (c+1)^6 > c$. Ceci contredit l'hypothèse que c est un majorant de A. Ainsi, A n'admet ni maximum ni borne supérieure.
Attention : si $c \in]0,1[$, $c^2 < c$. Pour prendre $M = cI_3$ comme contre-exemple il faut au préalable exclure le cas $c < 1$ en remarquant que pour $M = I_3$, $\det(M^2) = 1$ donc $1 \in A$ donc $c \geqslant 1$.

Exercice 18

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$.
On suppose que $a < b$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < g(x)$.

1. On note $y_\lambda = \lambda a + (1-\lambda)b$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer y_0, y_1, $y_{\frac{1}{2}}$ et $y_{\frac{1}{3}}$.
Montrer que $\{\lambda a + (1-\lambda)b \,/\, \lambda \in [0,1]\} = [a,b]$.
2. Montrer qu'il existe une fonction continue h définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < h(x) < g(x)$.
3. En déduire un ensemble infini de fonctions vérifiant les mêmes propriétés que h.
4. ⋆⋆ Donner un exemple de telles fonctions f et g pour lesquelles il n'existe aucun $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + \varepsilon < g(x)$.

Correction.

1. On a $y_0 = a$, $y_1 = b$ et $y_{\frac{1}{2}} = \frac{a+b}{2}$ est la moyenne de a et b. Enfin, $y_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$ est la moyenne pondérée de a et b, de coefficients respectifs $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Nous allons montrer que faire varier λ dans $[0,1]$ construit des réels dans $[a,b]$ (et qu'on retrouve même tout l'intervalle $[a,b]$).

> Méthode : on montre l'égalité entre deux ensembles par double inclusion.

Notons $I = \{\lambda a + (1-\lambda)b \,/\, \lambda \in [0,1]\}$.
($\subset$) Montrons que $I \subset [a,b]$, autrement dit que pour tout $\lambda \in [0,1]$, $a \leqslant \lambda a + (1-\lambda)b \leqslant b$. On a $a < b$ donc pour tout $\lambda \in [0,1]$, $\lambda a \leqslant \lambda b$ car $\lambda \geqslant 0$ et $(1-\lambda)a \leqslant (1-\lambda)b$ car $1-\lambda \geqslant 0$ d'où

$$\lambda a + (1-\lambda)b \geqslant \lambda a + (1-\lambda)a = a \quad \text{et} \quad \lambda a + (1-\lambda)b \leqslant \lambda b + (1-\lambda)b = b.$$

Ainsi pour tout $x \in I$, $a \leqslant x \leqslant b$ *i.e.* $x \in [a,b]$ et donc $I \subset [a,b]$.
($\supset$) Soit $x \in [a,b]$, montrons que $x \in I$, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $x = \lambda a + (1-\lambda)b$. Or

$$x = \lambda a + (1-\lambda)b \Leftrightarrow x - b = \lambda(a-b) \Leftrightarrow \lambda = \frac{x-b}{a-b}.$$

Posons donc $\lambda = \frac{x-b}{a-b}$ et vérifions que $\lambda \in [0,1]$. Nous avons pour hypothèses $a < b$ et $a \leqslant x \leqslant b$ donc $\frac{1}{a-b} < 0$ et $\dfrac{a}{a-b} \geqslant \dfrac{x}{a-b} \geqslant \dfrac{b}{a-b}$ d'où $\dfrac{a-b}{a-b} \geqslant \dfrac{x-b}{a-b} \geqslant \dfrac{b-b}{a-b}$ *i.e.* $1 \geqslant \lambda \geqslant 0$ et $x \in I$.
Conclusion : $I \subset [a,b]$ et $[a,b] \subset I$ donc $I = [a,b]$.

2. *Indication : rappelons $x < y$ si et seulement si $\exists z, x < z < y$. Cette question est une forme de généralisation du sens direct de cette équivalence.*

Méthode : pour montrer l'existence d'un objet, on construit le plus souvent un candidat explicite.

Prenons par exemple, deux fonctions constantes, $f \equiv a$, $g \equiv b$ avec $a < b$ alors $h \equiv (a+b)/2$ convient.
Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = (f(x) + g(x))/2$. Alors h est continue comme combinaison linéaire de deux fonctions continues et on a bien $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < h(x) < g(x)$.

3. Le choix précédent pour h de prendre exactement la moyenne est arbitraire. La question 1 nous donne une indication pour faire une moyenne pondérée de f et g. Soit $h_\lambda : x \mapsto \lambda f(x) + (1-\lambda)g(x)$ pour $\lambda \in]0,1[$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x) < h_\lambda(x) < \lambda g(x) + (1-\lambda)g(x) = g(x)\,.$$

Ainsi, $\{h_\lambda \,/\, \lambda \in]0,1[\}$ est un ensemble infini de fonctions continues strictement comprises en f et g.
Exemple : considérons $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x+1$. Alors $h_\lambda : x \mapsto \lambda x + (1-\lambda)(x+1) = x + (1-\lambda)$. Les graphes des fonctions h_λ sont toutes les droites parallèles à la droite d'équation $y = x$ et strictement comprises entre celle-ci et la droite d'équation $y = x+1$. Remarquons plus généralement que plus λ est grand, plus h_λ est proche de f et inversement, plus λ est petit, plus h_λ est proche de g.

4. Cette question est un peu plus délicate. Il faut construire deux fonctions f et g qui se rapprochent l'une de l'autre, *i.e.* dont la différence tend vers 0 mais sans jamais se toucher. Pour des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, cela n'est possible qu'au voisinage de plus ou moins l'infini.
Posons par exemple, $f \equiv 0$ et $g : x \mapsto e^{-x}$. On a bien $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < g(x)$. Supposons par l'absurde qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + \varepsilon < g(x)$ donc tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon < g(x)$ (car $f \equiv 0$). Or $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) < \varepsilon$. Contradiction.
Il n'est pas aisé de comprendre pourquoi on ne peut pas généraliser ici l'équivalence "$x < y$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x + \varepsilon < y$". Ce sera une question centrale du cours de Topologie de 3e année de Licence Mathématiques !

Exercice 19

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}_+$. Soit $A \cdot B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists a \in A, \exists b \in B, x = ab\}$. Montrer que $\sup(A \cdot B) = \sup(A)\sup(B)$.

<u>Correction</u>.
On procède par double inégalité. Posons $M = \sup(A)\sup(B)$.

($\leqslant$) A et B étant non vides et majorées, elles admettent des bornes supérieures par la propriété de la borne supérieure. Pour tout $a \in A$, on a $a \leqslant \sup(A)$ (comme $\sup(A)$ est un majorant de A). Ainsi pour tout $b \in B$, $ab \leqslant \sup(A)b$, puisque $b \geqslant 0$ Notez l'importance de l'hypothèse $B \subset \mathbb{R}_+$ qui permet d'assurer la conservation du sens de l'inégalité. Également, comme $A \subset \mathbb{R}_+$, on a 0 minorant de A, donc $0 \leqslant \sup(A)$. Par conséquent, pour tout $b \in B$, $\sup(A)b \leqslant \sup(A)\sup(B)$. On a donc montré que pour tout $(a,b) \in A \times B$, $ab \leqslant M$, d'où M est un majorant de $A \cdot B$, qui est non vide donc admet une borne supérieure et $M \leqslant \sup(A)\sup(B)$.

($\geqslant$) Par définition des bornes supérieures de A et B, on peut construire des éléments $a \in A$ et $b \in B$ aussi proches que l'on souhaite de $\sup(A)$ et $\sup(B)$ respectivement, de sorte que ab est aussi proche que l'on veut de $\sup(A)\sup(B)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par la caractérisation de la borne supérieure, il exite $(a,b) \in A \times B$ tel que $\sup(A) - \varepsilon < a$ et $\sup(B) - \varepsilon < b$. Ainsi

$$M < (a+\varepsilon)(b+\varepsilon) = ab + \varepsilon(a+b) + \varepsilon^2 \leqslant ab + \varepsilon(\sup(A) + \sup(B)) + \varepsilon^2. \tag{1}$$

Cette équation est de la forme $M < ab + \varepsilon'$ avec ε' aussi petit que l'on veut. Soit $\varepsilon' > 0$, l'équation (1) étant vraiment pour tout $\varepsilon > 0$, on a pour ε suffisamment petit, $\varepsilon(\sup(A)+\sup(B))+\varepsilon^2 < \varepsilon'$. Ainsi $M - \varepsilon' < ab$ et par la caractérisation de la borne supérieure, on a directement $\sup(A \cdot B) = M$. On a réussi à approcher de manière arbitrairement proche le majorant M de $A \cdot B$ par des éléments de $A \cdot B$, par conséquent $M = \sup(A \cdot B)$.