Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2023-2024
ANALYSE 3

Feuille de TD n°1

Propriétés des réels.

Exercices complémentaires d'entraînement

1. EXERCICES CORRIGÉS : PRISE EN MAIN

Exercice 1

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x < y\,.$
2. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x < y\,.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}_-,\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0\,.$
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0\,.$
5. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall y \in \mathbb{R}^*,\ x + y > 0\,.$
6. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 > x\,.$

Correction.

1. Vrai. Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, $y = x + 1$ est un exemple possible validant l'assertion.
2. Faux. La négation de cette assertion est l'assertion
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \geqslant y\,.$$
Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, $y = x$ est un exemple possible validant cette négation.
3. Vrai. Pour $x \in \mathbb{R}$ donné (et a fortiori pour $x \in \mathbb{R}_-$), $y = 1 - x$ est un exemple possible validant l'assertion.
4. Faux. La négation de cette assertion est l'assertion
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y \leqslant 0\,.$$
Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, $y = -x$ est un exemple possible validant cette négation.
5. Faux. $x = 0$ et $y = -1$ fournit un contre-exemple à cette assertion.
6. Vrai. $x = -1$ est un exemple possible validant l'assertion.

Exercice 2

Soient A et B deux sous ensembles bornés de $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Donner la contraposée des assertions suivantes :

1. Si A admet un minimum, alors $\inf A \in A$.
2. Si A est inclus dans B, alors $\sup A \leqslant \sup B$.
3. Si A est l'image de B par f, alors f est bornée.
4. Si A est non vide et majoré, A admet une borne supérieure.

Correction.
On rappelle qu'une assertion "P implique Q" est vraie si et seulement si sa contraposée "non(Q) implique non(P)" est vraie. Il est parfois plus aisé de démontrer une assertion sous sa forme contraposée que sous sa forme initiale.

1. Si $\inf A \notin A$, alors A n'admet pas de minimum.
2. Si $\sup A > \sup B$, alors $A \subsetneq B$.
3. Si f est non bornée, alors $A \neq f(B)$.
Pour rappel, $f(B) = \{f(x) \,/\, x \in B\}$ et f est bornée s'écrit : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant M$.
4. Si A n'admet pas de borne supérieure, alors A est vide ou non majoré.

Exercice 3

Soient A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes et leur négation.

1. A est strictement inclus dans B.
2. L'intersection de A et B est vide.
3. Aucun élément de A ne minore B.
4. A est stable par addition.
5. Si A est majoré, alors B est inclus dans A.
6. A est un intervalle inclus dans $\mathbb{R}_+$.

Correction.
La double négation d'une proposition P est la proposition initiale P. On peut donc, selon la préférence de chacun, choisir de commencer par exprimer la négation puis obtenir la proposition initiale par double négation.

1. A est strictement inclus dans B si et seulement si A est inclus dans B et B n'est pas inclus dans A

$$A \subset B \text{ et } B \not\subset A \quad \text{se réécrit :} \quad \forall a \in A, a \in B \text{ et } \exists b \in B, b \notin A.$$

$$\text{Négation :} \quad \exists a \in A, a \notin B \quad \text{ou} \quad \forall b \in B, b \in A.$$

2. Rappel : $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in A \text{ et } x \in B\}$. On peut commencer par la négation : $A \cap B \neq \emptyset$

$$\text{Négation :} \quad \exists x \in \mathbb{R},\ x \in A \text{ et } x \in B.$$

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{se réécrit :} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ x \notin A \text{ ou } x \notin B.$$

3. On peut à nouveau commencer par la négation : il existe un élément de A qui est minorant de B.

$$\text{Négation :} \quad \exists a \in A, \forall b \in B, b \geqslant a.$$

$$\text{Aucun élément de } A \text{ ne minore } B \text{ se réécrit :} \quad \forall a \in A, \exists b \in B, b < a.$$

4. La somme de deux éléments de A est encore un élément de A :

$$\forall a \in A, \forall b \in A, a + b \in A.$$

$$\text{Négation :} \quad \exists a \in A, \exists b \in A, a + b \notin A.$$

5. La négation de "P implique Q" est "P et non(Q)". L'implication s'écrit :

$$(\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leqslant M) \Rightarrow (\forall b \in B, b \in A)\,.$$

$$\text{Négation :} \quad \exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leqslant M \text{ et } \exists b \in B, b \notin A.$$

6. Par définition : I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si pour tout $x, y \in I$, tout $z \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant z \leqslant y$ alors $z \in I$.
"$A \subset \mathbb{R}_+$ et A est un intervalle" se réécrit :

$$\forall x \in A, x \geqslant 0 \text{ et } \forall x, y \in A, \forall z \in \mathbb{R},\ x \leqslant z \leqslant y \Rightarrow z \in A\,.$$

$$\text{Négation :} \quad \exists x \in A, x < 0 \text{ ou } \exists x, y \in A, \exists z \in \mathbb{R}, (x \leqslant z \leqslant y \text{ et } z \notin A).$$

Exercice 4

Soient A et B deux sous ensembles minorés de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \cup B$ est minoré.

Correction.
Par définition : A est minoré si et seulement si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall a \in A, m \leqslant a$.

> Méthode : pour montrer l'existence d'un objet, on construit le plus souvent un candidat explicite.

Indication : Partons d'un exemple : $A = [0,1]$, $B = [1,2]$, $A \cup B = [0,2]$; 1 minore B mais pas $A \cup B$: un minorant de $A \cup B$ doit minorer A et B. Si on dispose d'un minorant de A et d'un minorant de B alors le minimum des deux sera un minorant de $A \cup B$.
Traduisons les hypothèses : Puisque A est minoré, il existe $m_A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $a \in A$, $m_A \leqslant a$. De même, puisque B est minoré, il existe $m_B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $b \in B$, $m_B \leqslant b$.
Posons $m = \min(m_A, m_B)$ (m existe, c'est notre candidat) et montrons que m est un minorant de $A \cup B$, *i.e.* pour tout $x \in A \cup B$, $m \leqslant x$. En effet, soit $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ ou $x \in B$. Or, si $x \in A$, alors $m \leqslant m_A \leqslant x$ et si $x \in B$, alors $m \leqslant m_B \leqslant x$. Dans les deux cas, $m \leqslant x$ (donc m est bien un minorant de $A \cup B$). Ceci démontre que $A \cup B$ est minoré.

Exercice 5

Soient A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$ avec B majoré. Montrer que $A \cap B$ est majoré.

Correction.
Par définition : B est majoré si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall b \in B, b \leqslant M$.

> Méthode : pour montrer l'existence d'un majorant de $A \cap B$, construisons un candidat explicite.

On peut comme précédemment s'aider d'un exemple pour remarquer que tout majorant de B est aussi un majorant de $A \cap B$.
On fait parler les hypothèses : Puisque B est majoré, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $b \in B$, $b \leqslant M$.
Alors pour tout $x \in A \cap B$, $x \leqslant M$ car $x \in B$. Ainsi, M est un majorant de $A \cap B$ et $A \cap B$ est bien majoré.

Exercice 6

Soit $A \subset \mathbb{Z}$. On suppose que A est un ensemble infini. Montrer qu'il contient au moins soit une infinité d'entiers pairs, soit une infinité d'entiers impairs.

Correction.

> Méthode : la déduction semble peu évidente à rédiger, on essaie un raisonnement par l'absurde.

On introduit des variables et des notations pour faciliter le raisonnement.
Notons $A_p = \{a \in A \,/\, \text{a est pair}\}$ et $A_i = \{a \in A \,/\, \text{a est impair}\}$ les sous-ensembles de A contenant respectivement les éléments pairs et les éléments impairs. Supposons par l'absurde que A_p et A_i soient des ensembles finis et notons $\#A_p$ et $\#A_i$ leurs cardinaux. Alors A_p et A_i sont disjoints et leur union est égale à A car tout entier est soit pair soit impair donc $\#A = \#(A_p \sqcup A_i) = \#A_p + \#A_i < \infty$. A est donc un ensemble fini. Contradiction.

Exercice 7

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\min(x,y) \leqslant \dfrac{x+y}{2} \leqslant \max(x,y)$.

Correction.
On veut montrer que la moyenne de deux nombres réels est comprise entre le minimum et le maximum des deux.
Par définition : $\min(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant y \\ y & \text{si } x \geqslant y \end{cases}$ et $\max(x,y) = \begin{cases} y & \text{si } x \leqslant y \\ x & \text{si } x \geqslant y \end{cases}$.

> Méthode : Pour s'alléger de l'indétermination sur les fonctions minimum, maximum et valeur absolue, on peut séparer l'étude selon les deux cas des définitions.

Si $x \leqslant y$, $\min(x,y) = x$, $\max(x,y) = y$. De plus, si $x \leqslant y$, alors $\frac{x+y}{2} \leqslant \frac{2y}{2} = y$ et $\frac{x+y}{2} \geqslant \frac{2x}{2} = x$ d'où $\min(x,y) = x \leqslant \dfrac{x+y}{2} \leqslant y = \max(x,y)$.
Si $x \geqslant y$, alors $x + y \leqslant 2x = 2\max(x,y)$ et $x + y \geqslant 2y = 2\min(x,y)$. D'où $\min(x,y) \leqslant \frac{x+y}{2} \leqslant \max(x,y)$.
On obtient bien l'inégalité demandée dans les 2 cas.

Exercice 8 Caractérisation d'un ensemble borné.

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que A est borné si et seulement si

$$\exists m, M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A, \quad m \leqslant a \leqslant M.$$

Correction.
On montre l'équivalence par double implication.
Par définition : un ensemble est borné s'il satisfait

$$\exists M_1 \in \mathbb{R},\ \forall a \in A, \quad |a| \leqslant M_1.$$

La notation M est déjà fixée dans l'énoncé donc on introduit une notation différente.
Puisqu'il n'y a pas de valeur absolue dans l'assertion de l'énoncé, on réécrira cette définition sans valeur absolue.
Par définition : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ ou encore $|x| = \max(x, -x)$. En particulier, $x \leqslant |x|$ et $-x \leqslant |x|$.
($\Rightarrow$) Si A est borné, il existe M_1 tel que pour tout $a \in A$, $|a| \leqslant M_1$. On a donc pour tout $a \in A$, $a \leqslant M_1$ et $-a \leqslant M_1$ d'où $-M_1 \leqslant a$ et donc $-M_1 \leqslant a \leqslant M_1$. Alors pour $m = -M_1$ et $M = M_1$, on a bien

$$\forall a \in A, \quad m \leqslant a \leqslant M.$$

($\Leftarrow$) Réciproquement, soient $m, M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in A$, $m \leqslant a \leqslant M$. Alors $-M \leqslant -a \leqslant -m$ donc en posant $M_1 = \max(M, -m)$, on a $a \leqslant M_1$ et $-a \leqslant M_1$ d'où $|a| \leqslant M_1$. A est bien borné.

L'équivalence $|x| \leqslant y \iff -y \leqslant x \leqslant y$ est un résultat du cours que l'on peut utiliser sans justification. On en a refait la démonstration ici à titre d'entraînement.

Exercice 9
Donner, dans chacun des cas suivants et sans justification, des exemples de sous ensembles A et B de $\mathbb{R}$ distincts tels que

1. $\inf A = \inf B$ et $\sup A = \sup B$
2. $A \subsetneq B$, $B \subsetneq A$, $\inf A = \inf B$ et $\sup A = \sup B$
3. $\min A = \min B$ et $\max A = \max B$
4. $\sup(A \cap B) \geqslant \sup(A \cup B)$
5. $A \subset B$, $\sup A = \inf B$
6.* $A \cap B = \emptyset$, ni A, ni B n'est minoré.

Correction.
1. Par exemple, $A = [0, 1]$ et $B =]0, 1[$ ou $B = [0, 1[$.
2. $A = \{0\} \cup \{1\}$ et $B = [0, 1[$ ou $A =]0, 1[$ et $B = [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$.
3. $A = \{0\} \cup \{1\}$ ou $A = [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ et $B = [0, 1]$.
4. $A = [0, 1]$ et $B = [-1, 1]$. On pourrait montrer que $\sup(A \cap B) \leqslant \sup(A \cup B)$ car $(A \cap B) \subset (A \cup B)$, d'où nécessairement l'égalité ici.
5. $A = \{0\}$ et $B = [0, 1]$. On pourrait montrer que $\inf B \leqslant \inf A$ car $A \subset B$, d'où ici $\sup A = \inf B \leqslant \inf A$. Or, on a toujours $\inf A \leqslant \sup A$ d'où $\inf A = \sup A$ et donc A est nécessairement réduit à un point.
6. $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Ou encore $A = \{-2n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{-(2n + 1) \,/\, n \in \mathbb{N}\}$.

2. Exercices corrigés : révisions et approfondissement

Exercice 10
Soient a et b deux réels distincts. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x - a| = |x - b|$.

Correction.
$x \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation si et seulement si x est à égal distance de a et de b, autrement dit x est le point médian entre a et b.
Par symétrie, on peut supposer que $a < b$. Raisonnons par cas :
— Si $x \leqslant a$, alors $x \leqslant a < b$ donc $|x - a| = a - x < b - x = |b - x|$. x n'est donc pas solution.
— Si $a \leqslant x \leqslant b$, l'équation devient $x - a = b - x$ dont l'unique solution est $x = \frac{a+b}{2}$.
— Si $b \leqslant x$, alors $a < b \leqslant x$ donc $|x - a| = x - a > x - b = |b - x|$. x n'est donc pas solution.
L'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation est donc le point médian $x = \frac{a+b}{2}$.
Remarque : si $a = b$ alors tout $x \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation.

Exercice 11
Soient $a, b, x \in \mathbb{R}$ tels que $x < a + b$. Montrer qu'il existe $x_a, x_b \in \mathbb{R}$ tels que $x_a < a$, $x_b < b$ et $x = x_a + x_b$.

Correction.
Méthode 1, on part d'un exemple : $a = 1$, $b = 2$ *et* $x = 2.9$ *alors* $x_a = 0.95$ *et* $x_b = 1.95$ *conviennent ; l'écart de* $\varepsilon = 0.1$ *entre* x *et* $a + b$ *est partagé en deux écarts plus petits de* 0.05.
Notons $\varepsilon = a + b - x$ l'écart entre x et $a + b$ de sorte que $\varepsilon > 0$. On peut alors poser $x_a = a - \varepsilon/2$ et $x_b = b - \varepsilon/2$. En effet, $x_a < a$, $x_b < b$ et $x_a + x_b = a + b - \varepsilon = x$.
Méthode 2 : l'hypothèse est une inégalité et on cherche à montrer une égalité. On utilise donc la caractérisation des relations d'ordre vue en cours et en TD puis on isole x pour construire la décomposition recherchée.
Puisque $x < a + b$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x + \varepsilon = a + b$. Ainsi, $x = a + b - \varepsilon = (a - \varepsilon/2) + (b - \varepsilon/2)$. De sorte que $x_a = a - \varepsilon/2$ et $x_b = b - \varepsilon/2$ conviennent car $\varepsilon > 0$.

Exercice 12
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer qu'il existe $a', b' \in \mathbb{R}$ tels que $a' < b'$ et $[a', b'] \subset]a, b[$.

Correction.
> Méthode : pour montrer l'existence d'une variable, on en construit un candidat explicite.

Puisque $a < b$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a < a + \varepsilon < b$. Posons alors $a' = a + \varepsilon$. Puisque $a' < b$, il existe $\varepsilon' > 0$ tel que $a' < a' + \varepsilon' < b$. Posons alors $b' = a' + \varepsilon'$. On a bien $a < a' < b' < b$ donc $[a', b'] \subset]a, b[$.

Exercice 13
Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :
1. $A = \{\min(|x|, 3) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$.

2. $A = \bigcup_{k\in\{0,1,2\}} \left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$.

3. $A = \{\cos(2x) \,/\, x \in \mathbb{R}_-\}$.

Correction.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\min(|x|, 3) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \leqslant 3 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases} = [0, 3]$. Alors pour tout $a \in A$, $0 \leqslant a \leqslant 3$. Or $0 \in A$ donc $\min A = \inf A = 0$ et $3 \in A$ donc $\max A = \sup A = 3$.

2. $A = [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \pi + \frac{\pi}{2}] \cup [2\pi, 2\pi + \frac{\pi}{2}]$. On a pour tout $a \in A$, $0 \leqslant a \leqslant 2\pi + \frac{\pi}{2}$. Or $0 \in A$ donc $\min A = \inf A = 0$ et $2\pi + \frac{\pi}{2} \in A$ donc $\max A = \sup A = 2\pi + \frac{\pi}{2}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $-1 \leqslant \cos 2x \leqslant 1$ donc pour tout $a \in A$, $-1 \leqslant a \leqslant 1$. Or $1 \in A$ car pour $x = 0$ on a $x \in \mathbb{R}_-$ et $\cos 2x = 1$ donc $\max A = \sup A = 1$ et $-1 \in A$ car pour $x = -\frac{\pi}{2}$ on a $x \in \mathbb{R}_-$ et $\cos 2x = -1$ donc $\min A = \inf A = -1$.
Attention à bien choisir x dans $\mathbb{R}_-$ pour montrer que les bornes sont atteintes.

Exercice 14 Lien entre minimum et borne inférieure
Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que A admet un minimum si et seulement si A admet une borne inférieure et $\inf(A) \in A$, auquel cas $\min(A) = \inf(A)$.

Correction.
Utilisons les définitions :

— m est le minimum de A si $m \in A$ et m est un minorant de A,

— $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A.

On montre l'équivalence par double implication.
($\Rightarrow$) Si A admet un minimum, alors A est minoré et non vide car $\min A \in A$ donc par la propriété de la borne inférieure, A admet une borne inférieure. On montre que $\inf A \in A$ en montrant que $\inf(A) = \min(A)$.

> Méthode : Pour montrer une égalité (ici $\inf(A) = \min(A)$), on peut raisonner par double inégalité.

($\leqslant$) Comme $\min(A)$ est un minorant et que $\inf(A)$ est le plus grand des minorants, on a $\min(A) \leqslant \inf(A)$.
($\geqslant$) Puisque $\inf(A)$ est un minorant de A et que $\min(A) \in A$, on a $\inf(A) \leqslant \min(A)$. D'où $\inf(A) = \min(A)$.

($\Leftarrow$) Si $\inf(A) \in A$, alors $\inf(A)$ étant un minorant de A, il satisfait la définition du minimum de A donc $\min(A)$ existe et vaut $\inf(A)$.

Exercice 15
Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $A =]a, +\infty[$ et on note $\underline{\mathcal{M}}(A)$ l'ensemble des minorants de A.
Donner la définition ensembliste de $\underline{\mathcal{M}}(]a, +\infty[)$ puis déterminer cet ensemble.

Correction.
Par définition, $\underline{\mathcal{M}}(A) = \{m \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in A, m \leqslant x\}$ (attention, a est fixé par l'énoncé, on ne peut pas écrire pour tout $a \in A$ ici).
Montrons que $\underline{\mathcal{M}}(A) =]-\infty, a]$ par double inclusion.
($\subset$) Soit m un minorant de A et supposons par l'absurde que $m > a$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $a < a + \varepsilon < m$. Alors $a + \varepsilon \in A$ ce qui contredit que m soit un minorant de A. Ainsi, $m \leqslant a$ et $\underline{\mathcal{M}}(A) \subset]-\infty, a]$.
($\supset$) Soit $y \in]-\infty, a]$. On a pour tout $x \in A$, $x > a \geqslant y$ donc $y < x$. Ainsi, y est un minorant de A.

Exercice 16
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall a \in A, \forall b \in B, \quad a \leqslant b.$$

Peut-on déduire les assertions suivantes :

1. $A \cap B = \emptyset$.
2. $B \neq \mathbb{R}$.
3. $\sup(A) \in B$.
4. $\forall b \in B$, $\sup(A) \leqslant b$.
5. $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.
6. $\inf(A) \leqslant \inf(B)$.

Correction.
Donnons des exemples : Si $A = [0,1]$, $B = [2,3]$ et $B = [1,2]$ conviennent mais pas $B = [0.5, 2]$.
Sauf mention explicite, on attend pour tout exercice des réponses justifiées (par démonstration ou par construction de contre-exemples).

1. Non, $A = [0,1]$ et $B = [1,2]$ en est un contre-exemple.
Attention, l'assertion $A \cap B = \emptyset$ est parfois vraie (par exemple pour $A = [0,1]$ et $B = [2,3]$). Ce n'est que l'implication "Si A et B vérifient les hypothèses de l'énoncé alors $A \cap B = \emptyset$" que l'on peut qualifier de fausse.
2. Oui. $A = \emptyset$ et $B = \mathbb{R}$ pourraient convenir si l'énoncé ne supposait pas A non vide. Il existe donc $a \in A$ tel que $\forall b \in B$, $a \leqslant b$ donc B est minoré par a or $\mathbb{R}$ n'est pas minoré donc $B \neq \mathbb{R}$ car, par exemple, $a - 1 \notin B$.
3. Non. $A = [0,1]$ et $B = [2,3]$ en est un contre-exemple.
4. Oui. B étant non vide, A est majoré donc d'après la propriété de la borne supérieure, $\sup(A)$ existe car A est également non vide.
Par définition : $\sup(A)$ est le plus petit majorant de A.
L'hypothèse nous dit que tout élément de B est un majorant de A.
Soit $b \in B$. D'après l'hypothèse, on a pour tout $a \in A$, $a \leqslant b$. Donc b est un majorant de A, d'où $\sup(A) \leqslant b$.
5. Oui. A étant non vide, B est minoré donc d'après la propriété de la borne inférieure, $\inf B$ existe car B est également non vide.
Par définition : $\inf B$ est le plus petit majorant de B.
On a montré à la question précédente que pour tout $b \in B$, on a $\sup(A) \leqslant b$. D'où $\sup(A)$ est un minorant de B et donc $\sup(A) \leqslant \inf B$.
6. C'est un piège ! L'inégalité est vraie d'après 5. sous réserve que A admette une borne inférieure, auquel cas $\inf A \leqslant \sup A$. Cependant, $A =]-\infty, 0]$ et $B = [0,1]$ donne un contre-exemple.

Exercice 17

Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 < 5\}$
2. $A = \{\det(M^2) \,/\, M \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})\}$.

Correction.

> Méthode : on commence par chercher un encadrement éventuel des éléments de A (aussi optimal que possible).

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 < 5 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{5}$ donc pour tout $x \in A$, $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$.
A est non vide et borné donc d'après la propriété de la borne supérieure et la propriété de la borne inférieure, A admet une borne inférieure et une borne supérieure.
On a $\sup(A) \leqslant \sqrt{5}$. Notons $y = \sup(A)$ et supposons par l'absurde que $y < \sqrt{5}$. Pour construire un élément de A non majoré par y, prenons le point médian entre y et $\sqrt{5}$. On a nécessairement $y > 0$, sinon y ne majore pas $1 \in A$. Posons alors $x = \frac{y+\sqrt{5}}{2}$, alors $0 < y < x < \sqrt{5}$ et l'élévation au carré étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, $x^2 < 5$. Ainsi $x \in A$ et $y < x$ donc y ne majore pas A. Contradiction. Finalement, $\sup(A) = \sqrt{5}$ et puisque $\sup(A) \notin A$, A n'admet pas de maximum.
De même, on a $\inf(A) \geqslant \sqrt{5}$. Notons encore $y = \inf(A)$ et supposons par l'absurde que $y > -\sqrt{5}$. On a nécessairement $y < 0$, sinon y ne minore pas $-1 \in A$. Posons alors $x = \frac{-\sqrt{5}+y}{2}$ alors $-\sqrt{5} < x < y < 0$ et l'élévation au carré étant décroissante sur $\mathbb{R}_-$, $x^2 < 5$. Ainsi, $x \in A$ et $y > x$ donc y ne minore pas A. Contradiction. Finalement, $\inf(A) = -\sqrt{5}$ et puisque $\inf(A) \notin A$, A n'admet pas de minimum.

2. On a pour tout $M \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, $\det(M^2) = \det(M)^2 \geqslant 0$. De plus, si $M = \alpha I_3$ avec I_3 la matrice identité, alors $\det(M) = \alpha^3$ et $\det(M^2) = \alpha^6$. On peut donc construire des matrices de déterminant aussi grand que l'on le souhaite. Ainsi, un premier encadrement de A est pour tout $a \in A$, $0 \leqslant a < +\infty$.
On a bien $0 \in A$ car la matrice nulle vérifie $\det(M^2) = 0$. Ainsi, A admet un minimum et donc une borne inférieure et on a $\min(A) = \inf(A) = 0$.
Supposons par l'absurde que A est majoré. Alors il existe $c \geqslant 0$ tel que $\forall a \in A$, $a \leqslant c$ donc $\forall M \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, $\det(M^2) \leqslant c$. Or en considérant $M = (c+1)I_3$, on a $\det(M^2) = (c+1)^6 > c$. Ceci contredit l'hypothèse que c est un majorant de A. Ainsi, A n'admet ni maximum ni borne supérieure.
Remarque : on aurait pu prendre en contre-exemple $M = cI_3$ sous réserve d'avoir exclu au préalable le cas $c < 1$ en remarquant que $\det(I_3^2) = 1$ donc $c \geqslant 1$.

Exercice 18

1. Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to 1} f(x) = \sqrt{2}$. Montrer que 1 n'est pas un majorant de $A = f([0,1[)$.

2. Soit $f :]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{x\to \pi} f(x) = 2$. Montrer que e n'est pas un minorant de $A = f(]-\pi,\pi[)$.

Correction.

1. On a $1 < \sqrt{2}$. Or pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in [0,1[$ tel que $\sqrt{2}-\varepsilon < f(x) < \sqrt{2}+\varepsilon$ car $\lim_{x\to 1} f(x) = \sqrt{2}$. En posant $\varepsilon = \sqrt{2}-1$, on a alors $\varepsilon > 0$ et $1 = \sqrt{2}-\varepsilon$, et il existe donc $x \in [0,1[$ tel que $1 < f(x)$. Ainsi, 1 n'est pas un majorant de A.

2. On a $2 < e$. Or pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in]-\pi,\pi[$ tel que $2-\varepsilon < f(x) < 2+\varepsilon$ car $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. En posant $\varepsilon = e-2$, on a alors $\varepsilon > 0$ et $e = 2+\varepsilon$, et il existe donc $x \in]-\pi,\pi[$ tel que $f(x) < e$. Ainsi, e n'est pas un minorant de A.

Exercice 19

Déterminer, s'ils existent, un majorant, un minorant, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de l'ensemble

$$A = \{e^{-3x^2+1} \,/\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Correction.

> Méthode : on commence par chercher un encadrement éventuel des éléments de A (aussi optimal que possible).

Soient $P : x \in \mathbb{R} \mapsto -3x^2+1$ et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{P(x)}$. Ces fonctions sont bien définies sur $\mathbb{R}$. La fonction exponentielle est croissante donc f est maximale quand P est maximal. On a $P'(x) = -6x$ donc P admet un maximum en 0 (car son coefficient dominant est négatif) de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < f(x) \leqslant f(0) = e$ (car la fonction exponentielle est strictement positive).

Ainsi, A admet un maximum (car $f(0) \in A$) et donc une borne supérieure et on a $\max(A) = \sup(A) = e$. A est non vide et minorée donc d'après la propriété de la borne inférieure, A admet une borne inférieure et $\inf(A) \geqslant 0$. Notons $y = \inf(A)$ et supposons par l'absurde que $y > 0$. Construisons $f(x) \in A$ tel que $f(x) < y$. Or $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $0 < f(x_0) < y$. De sorte qu'un tel y ne serait pas un minorant de A. D'où par contradiction $y \leqslant 0$ et finalement $y = \inf(A) = 0$. Puisque $\inf(A) \notin A$, A n'admet pas de minimum.

Exercice 20

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$.
On suppose que $a < b$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < g(x)$.

1. On note $y_\lambda = \lambda a + (1-\lambda)b$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer y_0, y_1, $y_{\frac{1}{2}}$ et $y_{\frac{1}{3}}$.
Montrer que $\{\lambda a + (1-\lambda)b \,/\, \lambda \in [0,1]\} = [a,b]$.
2. Montrer qu'il existe une fonction continue h définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < h(x) < g(x)$.
3. En déduire un ensemble infini de fonctions vérifiant les mêmes propriétés que h.
4. $\star\star$ Donner un exemple de telles fonctions f et g pour lesquelles il n'existe aucun $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + \varepsilon < g(x)$.

Correction.

1. On a $y_0 = a$, $y_1 = b$ et $y_{\frac{1}{2}} = \frac{a+b}{2}$ est la moyenne de a et b. Enfin, $y_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$ est la moyenne pondérée de a et b, de coefficients respectifs $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Nous allons montrer que faire varier λ dans $[0,1]$ construit des réels dans $[a,b]$ (et qu'on retrouve même tout l'intervalle $[a,b]$).

> Méthode : on montre l'égalité entre deux ensembles par double inclusion.

Notons $I = \{\lambda a + (1-\lambda)b \,/\, \lambda \in [0,1]\}$.
($\subset$) Montrons que $I \subset [a,b]$, autrement dit que pour tout $\lambda \in [0,1]$, $a \leqslant \lambda a + (1-\lambda)b \leqslant b$. On a $a < b$ donc pour tout $\lambda \in [0,1]$, $\lambda a \leqslant \lambda b$ car $\lambda \geqslant 0$ et $(1-\lambda)a \leqslant (1-\lambda)b$ car $1-\lambda \geqslant 0$ d'où

$$\lambda a + (1-\lambda)b \geqslant \lambda a + (1-\lambda)a = a \quad \text{et} \quad \lambda a + (1-\lambda)b \leqslant \lambda b + (1-\lambda)b = b.$$

Ainsi pour tout $x \in I$, $a \leqslant x \leqslant b$ *i.e.* $x \in [a,b]$ et donc $I \subset [a,b]$.
($\supset$) Soit $x \in [a,b]$, montrons que $x \in I$, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $x = \lambda a + (1-\lambda)b$. Or

$$x = \lambda a + (1-\lambda)b \Leftrightarrow x - b = \lambda(a-b) \Leftrightarrow \lambda = \frac{x-b}{a-b}.$$

Posons donc $\lambda = \frac{x-b}{a-b}$ et vérifions que $\lambda \in [0,1]$. Nous avons pour hypothèses $a < b$ et $a \leqslant x \leqslant b$ donc $\frac{1}{a-b} < 0$ et $\dfrac{a}{a-b} \geqslant \dfrac{x}{a-b} \geqslant \dfrac{b}{a-b}$ d'où $\dfrac{a-b}{a-b} \geqslant \dfrac{x-b}{a-b} \geqslant \dfrac{b-b}{a-b}$ *i.e.* $1 \geqslant \lambda \geqslant 0$ et $x \in I$.
Conclusion : $I \subset [a,b]$ et $[a,b] \subset I$ donc $I = [a,b]$.

2. *Indication : rappelons $x < y$ si et seulement si $\exists z, x < z < y$. Cette question est une forme de généralisation du sens direct de cette équivalence.*

> Méthode : pour montrer l'existence d'un objet, on construit le plus souvent un candidat explicite.

Prenons par exemple, deux fonctions constantes, $f \equiv a$, $g \equiv b$ avec $a < b$ alors $h \equiv (a+b)/2$ convient.
Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = (f(x) + g(x))/2$. Alors h est continue comme combinaison linéaire de deux fonctions continues et on a bien $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < h(x) < g(x)$.

3. Le choix précédent pour h de prendre exactement la moyenne est arbitraire. La question 1 nous donne une indication pour faire une moyenne pondérée de f et g. Soit $h_\lambda : x \mapsto \lambda f(x) + (1-\lambda)g(x)$ pour $\lambda \in]0,1[$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x) < h_\lambda(x) < \lambda g(x) + (1-\lambda)g(x) = g(x)\,.$$

Ainsi, $\{h_\lambda \,/\, \lambda \in]0,1[\}$ est un ensemble infini de fonctions continues strictement comprises en f et g.
Exemple : considérons $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x+1$. Alors $h_\lambda : x \mapsto \lambda x + (1-\lambda)(x+1) = x + (1-\lambda)$. Les graphes des fonctions h_λ sont toutes les droites parallèles à la droite d'équation $y = x$ et strictement comprises entre celle-ci et la droite d'équation $y = x+1$. Remarquons plus généralement que plus λ est grand, plus h_λ est proche de f et inversement, plus λ est petit, plus h_λ est proche de g.

4. Cette question est un peu plus délicate. Il faut construire deux fonctions f et g qui se rapprochent l'une de l'autre, *i.e.* dont la différence tend vers 0 mais sans jamais se toucher. Pour des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, cela n'est possible qu'au voisinage de plus ou moins l'infini.
Posons par exemple, $f \equiv 0$ et $g : x \mapsto e^{-x}$. On a bien $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < g(x)$. Supposons par l'absurde qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + \varepsilon < g(x)$ donc tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon < g(x)$ (car $f \equiv 0$). Or $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) < \varepsilon$. Contradiction.
Il n'est pas aisé de comprendre pourquoi on ne peut pas généraliser ici l'équivalence "$x < y$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x + \varepsilon < y$". Ce sera une question centrale du cours de Topologie de 3e année de Licence Mathématiques !

Exercice 21

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}_+$. Soit $A \cdot B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists a \in A, \exists b \in B, x = ab\}$. Montrer que $\sup(A \cdot B) = \sup(A)\sup(B)$.

Correction.
On procède par double inégalité. Posons $M = \sup(A)\sup(B)$.

($\leqslant$) A et B étant non vides et majorées, elles admettent des bornes supérieures par la propriété de la borne supérieure. Pour tout $a \in A$, on a $a \leqslant \sup(A)$ (comme $\sup(A)$ est un majorant de A). Ainsi pour tout $b \in B$, $ab \leqslant \sup(A)b$, puisque $b \geqslant 0$ Notez l'importance de l'hypothèse $B \subset \mathbb{R}_+$ qui permet d'assurer la conservation du sens de l'inégalité. Également, comme $A \subset \mathbb{R}_+$, on a 0 minorant de A, donc $0 \leqslant \sup(A)$. Par conséquent, pour tout $b \in B$, $\sup(A)b \leqslant \sup(A)\sup(B)$. On a donc montré que pour tout $(a,b) \in A \times B$, $ab \leqslant M$, d'où M est un majorant de $A \cdot B$, qui est non vide donc admet une borne supérieure et $M \leqslant \sup(A)\sup(B)$.

($\geqslant$) Par définition des bornes supérieures de A et B, on peut construire des éléments $a \in A$ et $b \in B$ aussi proches que l'on souhaite de $\sup(A)$ et $\sup(B)$ respectivement, de sorte que ab est aussi proche que l'on veut de $\sup(A)\sup(B)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par la caractérisation de la borne supérieure, il exite $(a,b) \in A \times B$ tel que $\sup(A) - \varepsilon < a$ et $\sup(B) - \varepsilon < b$. Ainsi

$$M < (a+\varepsilon)(b+\varepsilon) = ab + \varepsilon(a+b) + \varepsilon^2 \leqslant ab + \varepsilon(\sup(A) + \sup(B)) + \varepsilon^2. \tag{1}$$

Cette équation est de la forme $M < ab + \varepsilon'$ avec ε' aussi petit que l'on veut. Soit $\varepsilon' > 0$, l'équation (1) étant vraiment pour tout $\varepsilon > 0$, on a pour ε suffisamment petit, $\varepsilon(\sup(A)+\sup(B))+\varepsilon^2 < \varepsilon'$. Ainsi $M - \varepsilon' < ab$ et par la caractérisation de la borne supérieure, on a directement $\sup(A \cdot B) = M$. On a réussi à approcher de manière arbitrairement proche le majorant M de $A \cdot B$ par des éléments de $A \cdot B$, par conséquent $M = \sup(A \cdot B)$.

Exercice 22 ⋆⋆

1. Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$.

2. Déterminer, s'ils existent, un majorant, un minorant, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de l'ensemble

$$A = \left\{ \int_a^b \frac{dt}{t^3} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R}, 1 \leqslant a < b \right\}.$$

<u>Correction</u>.

1. Posons $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+, t \mapsto \frac{1}{t^3}$. f est définie et continue sur $[1, +\infty[$ donc pour tout $x \geqslant 1$, $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^3}$ existe et on a $F(x) = \left[-\frac{1}{4t^4} \right]_1^x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^4} \xrightarrow[x \to +\infty]{} = \frac{1}{4}$.

2. Méthode : on commence par chercher un encadrement optimal des éléments de A.

Les éléments de A sont bien définis car f est continue sur tout intervalle $[a, b] \subset [1, +\infty[$ et puisque f est positive, on a $0 \leqslant \displaystyle\int_a^b \frac{dt}{t^3} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{4}$.

A n'admet pas de minimum car pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $1 \leqslant a < b$, $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{t^3} \geqslant \int_a^b \frac{dt}{b^3} = \frac{b-a}{b^3} > 0$ (f étant décroissante, elle est minorée sur $[a, b]$ par $f(b)$).

A n'admet pas de maximum car pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $1 \leqslant a < b$, $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{t^3} < \int_1^{b+1} \frac{dt}{t^3} \in A$ (car $f > 0$).

A est non vide et borné donc d'après les propriétés de la borne inférieure et de la borne supérieure, ces dernières existent. Notons $y = \sup A$ alors $y \leqslant \frac{1}{4}$. Supposons par l'absurde que $y < \frac{1}{4}$. On a pour tout $x > 1$, $F(x) \in A$ (correspondant à $a = 1$ et $b = x$) or F tend vers $\frac{1}{4}$ quand x tend vers $+\infty$ donc il existe $x_0 > 1$ tel que $y < F(x) < \frac{1}{4}$. D'où par contradiction, $y \geqslant \frac{1}{4}$ et finalement $\sup A = \frac{1}{4}$.
Notons maintenant $y = \inf A$ d'où par l'encadrement initial, $y \geqslant 0$. Supposons par l'absurde que $y > 0$. Il s'agit de trouver a et b tels que $\int_a^b \frac{dt}{t^3} < y$. Or f est bornée donc si l'intervalle d'intégration est infiniment petit, son intégrale sur cet intervalle l'est également (penser aux rectangles des sommes de Riemann dont l'aire tend vers 0 quand $\frac{1}{n}$ tend vers 0). On a pour tout $t \geqslant 1$, $f(t) \leqslant 1$ donc pour $a = 1$ et $b = \frac{1}{n}$, $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b 1dt = \frac{1}{n}$ et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi pour $N > \frac{1}{y}$ et $b = \frac{1}{N}$, $\int_a^b \frac{dt}{t^3} \leqslant \frac{1}{N} < y$. D'où par contradiction, $y \leqslant 0$ et finalement $\inf A = 0$.

Remarquons que si on avait défini A avec une inégalité large entre a et b, A aurait admis 0 pour minimum.