Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2024-2025
ANALYSE 3

Feuille de TD n°1

Langage mathématique, propriétés des réels.

Exercices complémentaires d'entraînement

1. Exercices corrigés : prise en main

Exercice 1
Soient A et B deux sous ensembles bornés de $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Donner la contraposée des assertions suivantes :

1. Si A admet un minimum, alors $\inf A \in A$.
2. Si A est inclus dans B, alors $\sup A \leqslant \sup B$.
3. Si A est l'image de B par f, alors f est bornée sur A.
4. Si A est non vide et majoré, A admet une borne supérieure.
5. Si f est monotone, alors f est croissante ou décroissante.

Exercice 2
Soient A et B deux sous ensembles minorés de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \cup B$ est minoré.

Exercice 3
Soient A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$ avec B majoré. Montrer que $A \cap B$ est majoré.

Exercice 4
Soit $(A_n)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \,.$$

Exercice 5
Soit $A \subset \mathbb{Z}$. On suppose que A est un ensemble infini. Montrer qu'il contient au moins soit une infinité d'entiers pairs, soit une infinité d'entiers impairs.

Exercice 6
Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\min(x, y) \leqslant \dfrac{x+y}{2} \leqslant \max(x, y)\,.$

Exercice 7 Caractérisation d'un ensemble borné.
Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que A est borné si et seulement si

$$\exists m, M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A, \quad m \leqslant a \leqslant M.$$

Exercice 8
Donner, dans chacun des cas suivants et sans justification, des exemples de sous ensembles A et B de $\mathbb{R}$ distincts tels que

1. $\inf A = \inf B$ et $\sup A = \sup B$
2. $A \subsetneq B$, $B \subsetneq A$, $\inf A = \inf B$ et $\sup A = \sup B$
3. $\min A = \min B$ et $\max A = \max B$
4. $\sup(A \cap B) \geqslant \sup(A \cup B)$
5. $A \subset B$, $\sup A = \inf B$
6.* $A \cap B = \emptyset$, ni A, ni B n'est minoré.

Exercice 9
Soient a et b deux réels distincts. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x-a| = |x-b|$.

Exercice 10
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer qu'il existe $a', b' \in \mathbb{R}$ tels que $a' < b'$ et $[a', b'] \subset]a, b[$.

Exercice 11
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$[a+\varepsilon, a+2\varepsilon] \cap [b, +\infty[= \emptyset\,.$$

Exercice 12
Soient $a, b, x \in \mathbb{R}$ tels que $x < a+b$. Montrer qu'il existe $x_a, x_b \in \mathbb{R}$ tels que $x_a < a$, $x_b < b$ et $x = x_a + x_b$.

Exercice 13
Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1. $A = \{\min(|x|, 3) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$.
2. $A = \displaystyle\bigcup_{k \in \{0,1,2\}} \left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$.
3. $A = \{\cos(2x) \,/\, x \in \mathbb{R}_-\}$.

Exercice 14 (Cours : Lien entre minimum et borne inférieure)
Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que A admet un minimum si et seulement si A admet une borne inférieure et $\inf(A) \in A$, auquel cas $\min(A) = \inf(A)$.

Exercice 15
Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $A =]a, +\infty[$ et on note $\underline{\mathcal{M}}(A)$ l'ensemble des minorants de A.
Donner la définition ensembliste de $\underline{\mathcal{M}}(]a, +\infty[)$ puis déterminer cet ensemble.

Exercice 16
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall a \in A, \forall b \in B, \quad a \leqslant b.$$

Peut-on déduire les assertions suivantes :

1. $A \cap B = \emptyset$.
2. $B \neq \mathbb{R}$.
3. $\sup(A) \in B$.
4. $\forall b \in B$, $\sup(A) \leqslant b$.
5. $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.
6. $\inf(A) \leqslant \inf(B)$.

Exercice 17
Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 < 5\}$
2. $A = \{\det(M^2) \,/\, M \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})\}$.

Exercice 18
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$.
On suppose que $a < b$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < g(x)$.

1. On note $y_\lambda = \lambda a + (1-\lambda) b$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer y_0, y_1, $y_{\frac{1}{2}}$ et $y_{\frac{1}{3}}$.
   Montrer que $\{\lambda a + (1-\lambda) b \,/\, \lambda \in [0,1]\} = [a, b]$.
2. Montrer qu'il existe une fonction continue h définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < h(x) < g(x)$.
3. En déduire un ensemble infini de fonctions vérifiant les mêmes propriétés que h.
4. $\star\star$ Donner un exemple de telles fonctions f et g pour lesquelles il n'existe aucun $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + \varepsilon < g(x)$.

Exercice 19
Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}_+$. Soit $A \cdot B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists a \in A, \exists b \in B, x = ab\}$. Montrer que $\sup(A \cdot B) = \sup(A)\sup(B)$.