

Licence 2^{ème} année, Mathématiques et Applications, 2023-2024
ANALYSE 3

Feuille de TD n°1

Propriétés des réels.

Exercices complémentaires d'entraînement

1. EXERCICES CORRIGÉS : PRISE EN MAIN

Exercice 1

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}_-, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}^*, x + y > 0$.
6. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$.

Exercice 2

Soient A et B deux sous ensembles bornés de \mathbb{R} et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Donner la contraposée des assertions suivantes :

1. Si A admet un minimum, alors $\inf A \in A$.
2. Si A est inclus dans B , alors $\sup A \leq \sup B$.
3. Si A est l'image de B par f , alors f est bornée.
4. Si A est non vide et majoré, A admet une borne supérieure.

Exercice 3

Soient A et B deux sous ensembles de \mathbb{R} . Écrire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes et leur négation.

1. A est strictement inclus dans B .
2. L'intersection de A et B est vide.
3. Aucun élément de A ne minore B .
4. A est stable par addition.
5. Si A est majoré, alors B est inclus dans A .
6. A est un intervalle inclus dans \mathbb{R}_+ .

Exercice 4

Soient A et B deux sous ensembles minorés de \mathbb{R} . Montrer que $A \cup B$ est minoré.

Exercice 5

Soient A et B deux sous ensembles de \mathbb{R} avec B majoré. Montrer que $A \cap B$ est majoré.

Exercice 6

Soit $A \subset \mathbb{Z}$. On suppose que A est un ensemble infini. Montrer qu'il contient au moins soit une infinité d'entiers pairs, soit une infinité d'entiers impairs.

Exercice 7

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\min(x, y) \leq \frac{x + y}{2} \leq \max(x, y)$.

Exercice 8 Caractérisation d'un ensemble borné.

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que A est borné si et seulement si

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, \quad m \leq a \leq M.$$

Exercice 9

Donner, dans chacun des cas suivants et sans justification, des exemples de sous ensembles A et B de \mathbb{R} distincts tels que

1. $\inf A = \inf B$ et $\sup A = \sup B$
2. $A \subsetneq B$, $B \subsetneq A$, $\inf A = \inf B$ et $\sup A = \sup B$
3. $\min A = \min B$ et $\max A = \max B$
4. $\sup(A \cap B) \geq \sup(A \cup B)$
5. $A \subset B$, $\sup A = \inf B$
- 6.* $A \cap B = \emptyset$, ni A , ni B n'est minoré.

2. EXERCICES CORRIGÉS : RÉVISIONS ET APPROFONDISSEMENT

Exercice 10

Soient a et b deux réels distincts. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $|x - a| = |x - b|$.

Exercice 11

Soient $a, b, x \in \mathbb{R}$ tels que $x < a + b$. Montrer qu'il existe $x_a, x_b \in \mathbb{R}$ tels que $x_a < a$, $x_b < b$ et $x = x_a + x_b$.

Exercice 12

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer qu'il existe $a', b' \in \mathbb{R}$ tels que $a' < b'$ et $[a', b'] \subset]a, b[$.

Exercice 13

Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1. $A = \{\min(|x|, 3) / x \in \mathbb{R}\}$.
2. $A = \bigcup_{k \in \{0,1,2\}} \left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2} \right]$.
3. $A = \{\cos(2x) / x \in \mathbb{R}_-\}$.

Exercice 14 Lien entre minimum et borne inférieure

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que A admet un minimum si et seulement si A admet une borne inférieure et $\inf(A) \in A$, auquel cas $\min(A) = \inf(A)$.

Exercice 15

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $A =]a, +\infty[$ et on note $\underline{\mathcal{M}}(A)$ l'ensemble des minorants de A . Donner la définition ensembliste de $\underline{\mathcal{M}}(]a, +\infty[)$ puis déterminer cet ensemble.

Exercice 16

Soient A et B deux parties non vides de \mathbb{R} telles que

$$\forall a \in A, \forall b \in B, \quad a \leq b.$$

Peut-on déduire les assertions suivantes :

1. $A \cap B = \emptyset$.
2. $B \neq \mathbb{R}$.
3. $\sup(A) \in B$.
4. $\forall b \in B, \sup(A) \leq b$.
5. $\sup(A) \leq \inf(B)$.
6. $\inf(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 17

Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1. $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 5\}$
2. $A = \{\det(M^2) / M \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})\}$.

Exercice 18

1. Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \sqrt{2}$. Montrer que 1 n'est pas un majorant de $A = f(]0, 1[)$.

2. Soit $f :]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = 2$. Montrer que e n'est pas un minorant de $A = f(] - \pi, \pi[)$.

Exercice 19

Déterminer, s'ils existent, un majorant, un minorant, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de l'ensemble

$$A = \{e^{-3x^2+1} / x \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 20

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions continues définies sur \mathbb{R} .

On suppose que $a < b$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < g(x)$.

1. On note $y_\lambda = \lambda a + (1 - \lambda)b$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $y_0, y_1, y_{\frac{1}{2}}$ et $y_{\frac{1}{3}}$.
Montrer que $\{\lambda a + (1 - \lambda)b / \lambda \in [0, 1]\} = [a, b]$.
2. Montrer qu'il existe une fonction continue h définie sur \mathbb{R} telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < h(x) < g(x)$.
3. En déduire un ensemble infini de fonctions vérifiant les mêmes propriétés que h .
4. **★★** Donner un exemple de telles fonctions f et g pour lesquelles il n'existe aucun $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) + \varepsilon < g(x)$.

Exercice 21

Soient A et B deux parties non vides et majorées de \mathbb{R}_+ . Soit $A \cdot B = \{x \in \mathbb{R} / \exists a \in A, \exists b \in B, x = ab\}$. Montrer que $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \sup(B)$.

Exercice 22 **★★**

1. Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$.

2. Déterminer, s'ils existent, un majorant, un minorant, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de l'ensemble

$$A = \left\{ \int_a^b \frac{dt}{t^3} \mid a, b \in \mathbb{R}, 1 \leq a < b \right\}.$$