Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 2ème année, Mathématiques et Applications, 2024-2025
ANALYSE 3

Feuille de TD n°1

Langage mathématique, propriétés des réels.

Les questions ou exercices annotés par un ♣ sont d'un niveau plus difficile que celui attendu pour l'examen.

Exercice 1

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x < y$.
2. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x < y$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}_-,\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall y \in \mathbb{R}^*,\ x + y > 0$.
6. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 > x$.

Exercice 2

Soient A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes et leur négation.

1. A est stable par addition.
2. A est strictement inclus dans B.
3. L'intersection de A et B est vide.
4. Aucun élément de A ne minore B.
5. Si A est majoré, alors B est inclus dans A.
6. A est un intervalle inclus dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a < b < c < d$.

1. Montrer que $[a, b] \cup [c, d]$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $]a, b[\cup]c, d[$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Cours : caractérisations des relations d'ordre)

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $x < y$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$, $x + \varepsilon < y$.
Réécrire cette assertion avec des quantificateurs. Discuter du cas où toutes ces variables sont des entiers.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \leqslant y$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, $x < y + \varepsilon$.
3. Donner un énoncé semblable pour caractériser $x \geqslant y$ à l'aide d'inégalités strictes.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer l'assertion

$$\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon \Leftrightarrow x = 0.$$

Exercice 5

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\min(x, y) = -\max(-x, -y)$.
2. Montrer que $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$.
3. En déduire que $\min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.

Exercice 6 (Cours : inégalité triangulaire)

Soient $x, y, M \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $|x| \leqslant M$ si et seulement si $-M \leqslant x \leqslant M$ (remarquer que nécessairement $M \geqslant 0$).
2. En déduire l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
3. Montrer que $|x| \leqslant |x+y| + |y|$ et en déduire l'inégalité triangulaire inverse, c'est-à-dire $||x| - |y|| \leqslant |x+y|$.

Exercice 7 (Moyenne pondérée)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$. Soient $c_1, c_2, \ldots, c_n$ des coefficients positifs non tous nuls. La moyenne pondérée des données $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_n$ est donnée par

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n c_i x_i}{\sum_{i=1}^n c_i}.$$

1. Montrer que m est bien défini et que $\min(A) \leqslant m \leqslant \max(A)$.
2. Montrer qu'il existe $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ et tels que m soit également la moyenne pondérée des données $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Exercice 8
Soient a et b deux réels strictement positifs. Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1. $A = [-6, -2[\cup[-1, 3[\cup]5, 9]$.
2. $A =]-\infty, 0] \cup \{1\}$.
3. $A = \{a + nb \,/\, n \in \mathbb{N}\}$.
4. $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^4 + 3 \leqslant 0\}$.
5. $A = \{a + (-1)^n b \,/\, n \in \mathbb{N}\}$.
6. $A = \{\|(x, y)\| \,/\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \max(|x|, |y|) \leqslant 1\}$.

Exercice 9 (Cours : lien entre maximum et borne supérieure)
Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que si A admet un maximum, alors A admet une borne supérieure et $\max(A) = \sup(A)$.

Exercice 10
Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants.

1. $A = [0, 1[$.
2. $A =]-1, 1] \cup \{\pi\}$.
3. ♣ $A = \{\|(x, y, z)\| \,/\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x| < 1, |y| < 1, |z| < 1\}$.

Exercice 11 (Cours : classification des intervalles de $\mathbb{R}$)
L'objectif de cet exercice est de démontrer les points principaux du résultat suivant. Tout intervalle I de $\mathbb{R}$ entre dans l'une des 10 catégories suivantes :

1. $I = \emptyset$,
2. I est ni majoré, ni minoré : $I = \mathbb{R}$,
3. I est majoré mais non minoré :
   a) si I a un maximum : $I =]-\infty, a]$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$,
   b) si I n'a pas de maximum : $I =]-\infty, a[$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$,
4. I est minoré mais non majoré :
   a) si I a un minimum : $I = [a, +\infty[$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$,
   b) si I n'a pas de minimum : $I =]a, +\infty[$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$,
5. I est borné :
   a) si I a un minimum et un maximum : $I = [a, b]$ pour $a \leqslant b \in \mathbb{R}$,
   b) si I a un minimum et pas de maximum : $I = [a, b[$ pour $a < b \in \mathbb{R}$,
   c) si I a un maximum et pas de minimum : $I =]a, b]$ pour $a < b \in \mathbb{R}$,
   d) si I n'a ni minimum ni maximum : $I =]a, b[$ pour $a < b \in \mathbb{R}$.

Considérons $I \neq \emptyset$.

1. Démontrer que si I est ni majoré, ni minoré, alors $I = \mathbb{R}$.
2. Démontrer que si I est minoré, non majoré et n'a pas de minimum, alors $I =]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.
3. Démontrer que si I a un minimum et maximum, alors $I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leqslant b$.

Exercice 12 (Cours : caractérisation de la borne inférieure)
L'objectif de cette exercice est de démontrer la caractérisation de la borne inférieure.
Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les deux points suivants :

(1) A admet une borne inférieure et $m = \inf(A)$.

(2) Le réel m satisfait :

a) m est un minorant de A,

b) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $m \leqslant a_\varepsilon < m + \varepsilon$.

Application : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$. Utiliser la caractérisation de la borne inférieure pour déterminer $\inf(]a, b[)$ et en déduire que $\min(]a, b[)$ n'existe pas.

Exercice 13
Soient $m \in \mathbb{R}$, A un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et $B = A \cap]m, m+1]$. On suppose que B est non vide, que $\inf A = m$ et que $m \notin A$. Montrer que $\inf B = m$. Que dire si $m \in A$?

Exercice 14
Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $A \subset B$ alors $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.
2. Montrer que $A \cup B$ est majorée, puis que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
3. Supposons $A \cap B \neq \varnothing$. Démontrer que $A \cap B$ est majorée, puis que $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup(A), \sup(B))$. Donner un exemple pour lequel l'inégalité est stricte.