Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

License $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2023-2024
Analyse 3

Feuille de TD n°1

Propriétés des réels.

Les questions ou exercices annotés par un ♣ sont d'un niveau plus difficile que celui attendu pour l'examen.

Exercice 1 (Cours : caractérisations des relations d'ordre)

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $x < y$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$, $x + \varepsilon < y$.
Réécrire cette assertion avec des quantificateurs. Discuter du cas où toutes ces variables sont des entiers.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \leqslant y$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, $x < y + \varepsilon$.
3. Donner un énoncé semblable pour caractériser $x \geqslant y$ à l'aide d'inégalités strictes.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer l'assertion

$$\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon \Leftrightarrow x = 0.$$

Exercice 2

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\min(x, y) = -\max(-x, -y)$.
2. Montrer que $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$.
3. En déduire que $\min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.

Exercice 3 (Cours : inégalité triangulaire)

Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $|x| \leqslant |y|$ si et seulement si $-|y| \leqslant x \leqslant |y|$.
2. En déduire l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
3. Montrer que $|x| \leqslant |x + y| + |y|$ et en déduire l'inégalité triangulaire inverse, c'est-à-dire $||x| - |y|| \leqslant |x + y|$.

Exercice 4 (Moyenne pondérée)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$. Soient $c_1, c_2, \dots, c_n$ des coefficients positifs non tous nuls. On rappelle que la moyenne pondérée des $x_1, x_2, \dots, x_n$ par les coefficients $c_1, c_2, \dots, c_n$ est donnée par

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n c_i x_i}{\sum_{i=1}^n c_i}.$$

1. Montrer que m est bien défini et que $\min(A) \leqslant m \leqslant \max(A)$.
2. Montrer qu'il existe $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ et $m = \sum_{i=1}^n p_i x_i$.
3. Soit $m' \in \mathbb{R}$ tel que $\min(A) \leqslant m' \leqslant \max(A)$.
   a) Soit $a \leqslant b$. Montrer que $[a, b] = \{(1-t)a + tb \,/\, t \in [0, 1]\}$.
   b) En déduire qu'il existe $p'_1, p'_2, \dots, p'_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^n p'_i = 1$ et $m' = \sum_{i=1}^n p'_i x_i$.
   c) Choisir un ensemble A pour $n = 4$ et représenter

$$C = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n c_i x_i}{\sum_{i=1}^n c_i} \,/\, c_1, \dots, c_n \geqslant 0 \text{ non tous nuls} \right\}.$$

Exercice 5
Soient a et b deux réels strictement positifs. Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1. $A = [-6, -2[\cup [-1, 3[\cup]5, 9]$.
2. $A =]-\infty, 0] \cup \{1\}$.
3. $A = \{a + nb \,/\, n \in \mathbb{N}\}$.
4. $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^4 + 3 \leqslant 0\}$.
5. $A = \{a + (-1)^n b \,/\, n \in \mathbb{N}\}$.
6. $A = \{\|(x, y)\| \,/\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \max(|x|, |y|) \leqslant 1\}$.

Exercice 6 (Cours : lien entre maximum et borne supérieure)
Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que si A admet un maximum, alors A admet une borne supérieure et $\max(A) = \sup(A)$.

Exercice 7
Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants.

1. $A = [0, 1[$.
2. $A =]-1, 1] \cup \{\pi\}$.
3. ♣ $A = \{\|(x, y, z)\| \,/\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x| < 1, |y| < 1, |z| < 1\}$.

Exercice 8 (Cours : caractérisation de la borne inférieure)
L'objectif de cette exercice est de démontrer la caractérisation de la borne inférieure.
Soient $A \subset \mathbb{R}$ admettant une borne inférieure et $m \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les deux points suivants :

(1) On a $m = \inf(A)$.
(2) Le réel m satisfait :
  a) m est un minorant de A,
  b) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $a_\varepsilon < m + \varepsilon$.

Application : soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de $A = \{a + \frac{b}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 9
Déterminer, s'ils existent la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{2x - 1}{x + 2} \,/\, x \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Exercice 10
Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de $A = \{u_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \begin{cases} 2^n, & \text{si } n \text{ pair} \\ 2^{-n}, & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Exercice 11 ♣
Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{3x + 11}{x + 4} \cos^4 x \,/\, x \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Exercice 12 (Cours : classification des intervalles de $\mathbb{R}$)
L'objectif de cet exercice est de démontrer les points principaux du résultat suivant. Tout intervalle I de $\mathbb{R}$ entre dans l'une des 10 catégories suivantes :

1. $I = \emptyset$,
2. I est ni majoré, ni minoré : $I = \mathbb{R}$,
3. I est majoré mais non minoré :
   a) si I a un maximum : $I =]-\infty, a]$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$,
   b) si I n'a pas de maximum : $I =]-\infty, a[$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$,
4. I est minoré mais non majoré :
   a) si I a un minimum : $I = [a, +\infty[$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$,
   b) si I n'a pas de minimum : $I =]a, +\infty[$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$,
5. I est borné :
   a) si I a un minimum et un maximum : $I = [a, b]$ pour $a \leqslant b \in \mathbb{R}$,
   b) si I a un minimum et pas de maximum : $I = [a, b[$ pour $a < b \in \mathbb{R}$,
   c) si I a un maximum et pas de minimum : $I =]a, b]$ pour $a < b \in \mathbb{R}$,
   d) si I n'a ni minimum ni maximum : $I =]a, b[$ pour $a < b \in \mathbb{R}$.

Considérons $I \neq \emptyset$.

1. Démontrer que si I est ni majoré, ni minoré, alors $I = \mathbb{R}$.
2. Démontrer que si I est minoré, non majoré et n'a pas de minimum, alors $I =]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.
3. Démontrer que si I a un minimum et maximum, alors $I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leqslant b$.

Exercice 13
Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $A \subset B$ alors $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.
2. Montrer que $A \cup B$ est majorée, puis que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
3. Supposons $A \cap B \neq \varnothing$. Démontrer que $A \cap B$ est majorée, puis que $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup(A), \sup(B))$.
   Donner un exemple pour lequel l'inégalité est stricte.

Exercice 14
Soient $m \in \mathbb{R}$, A un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et $B = A \cap]m, m+1]$. On suppose que B est non vide, que $\inf A = m$ et que $m \notin A$. Montrer que $\inf B = m$. Que dire si $m \in A$?

Exercice 15
Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

1. Soit $A + B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists a \in A, \exists b \in B, x = a + b\}$. Exprimer $\sup(A + B)$ en fonction de $\sup(A)$ et $\sup(B)$.
2. Soit $A \cdot B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists a \in A, \exists b \in B, x = ab\}$. A-t-on $\sup(A \cdot B) = \sup(A)\sup(B)$?

Exercice 16
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée. On note $-A$ l'ensemble

$$-A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists a \in A, x = -a\}.$$

1. Montrer que $-A$ est non vide, majorée, et que $\sup(-A) = -\inf(A)$.
2. Soit B l'ensemble des minorants de A. Montrer que $B \neq \varnothing$, puis est majorée et enfin que $\sup(B) = \inf(A)$.

Exercice 17
Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ d'au moins deux éléments et x un élément de A.

1. Montrer que si $x < \sup(A)$, alors $\sup(A \setminus \{x\}) = \sup(A)$.
2. Montrer que la contraposée de la précédente implication s'écrit :
$$\sup(A \setminus \{x\}) < \sup(A) \quad \Rightarrow \quad x = \sup(A).$$
3. La réciproque de 1. est-elle vraie ?

Exercice 18 ♣
Soit $m \in \mathbb{R}$.
1. Construire A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $\inf(A) = \inf(B) = m$ et $\inf(A \cap B) > m$.
2. Même question en s'assurant que ni A, ni B n'admettent de minimum.

Exercice 19
Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On pose $B = \{|x-y| \,/\, x, y \in A\}$. Ainsi B est l'ensemble de toutes les distances entre deux points quelconques de A.
1. Montrer que $\sup(B)$ existe. On appelle ce réel diamètre de A et on notera $\mathrm{Diam}(A) = \sup(B)$.
2. Montrer que $\mathrm{Diam}(A) = 0$ si et seulement si A est un singleton.
3. Justifier que $\inf(A)$ et $\sup(A)$ existent, puis montrer que $\mathrm{Diam}(A) \leqslant \sup(A) - \inf(A)$.
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x, y \in A$ tels que $\sup(A) - \inf(A) - \varepsilon < x - y$.
5. En déduire finalement que $\mathrm{Diam}(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercice 20 ♣
Soit I, J deux sous ensembles non vides de $\mathbb{R}$. Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille bornée de réels. Soit $j \in J$ fixé, alors $\inf_{i\in I}(a_{i,j})$ est une notation [1] telle que
$$\inf_{i\in I}(a_{i,j}) := \inf\left(\{a_{i,j} \,/\, i \in I\}\right).$$
Cette quantité dépend donc en particulier de $j \in J$.
1. Montrer que $\sup_{j\in J}(\inf_{i\in I}(a_{i,j})) \leqslant \inf_{i\in I}(\sup_{j\in J}(a_{i,j}))$. *On prendra bien soin de justifier l'existence des différents* sup *et* inf *impliqués.*
2. a) A-t-on égalité ? On pourra considérer $I = J = \mathbb{N}^*$ et pour tout $(i,j) \in I \times J$, $a_{i,j} = \min\left(\frac{j}{i}, 1\right)$ et vérifier dans un premier temps que les hypothèses de l'exercice sont satisfaites dans ce cas.
   b) Pourquoi ne pouvait-on pas définir les $a_{i,j}$ par $a_{i,j} = \frac{j}{i}$ pour $i, j \geqslant 1$ et $j \leqslant i$?

1. De même pour $i \in I$ fixé, $\inf_{j\in J}(a_{i,j}) := \inf\left(\{a_{i,j} \,/\, j \in J\}\right)$. Ces notations s'adaptent directement pour la borne supérieure.