

Licence 2^{ème} année, Mathématiques et Applications
ANALYSE 3

Feuille de TD n°1

Langage mathématique, propriétés des réels.

Exercices complémentaires d'entraînement

Exercices de prise en main.

Exercice 1

Soient A et B deux sous ensembles bornés de $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Donner la contraposée des assertions suivantes :

1. Si A admet un minimum, alors $\inf A \in A$.
2. Si A est inclus dans B , alors $\sup A \leq \sup B$.
3. Si A est l'image de B par f , alors f est bornée sur A .
4. Si A est non vide et majoré, A admet une borne supérieure.
5. Si f est monotone, alors f est croissante ou décroissante.

Correction.

On rappelle qu'une assertion " P implique Q " est vraie si et seulement si sa contraposée " $\text{non}(Q)$ implique $\text{non}(P)$ " est vraie. Il est parfois plus aisé de démontrer une assertion sous sa forme contraposée que sous sa forme initiale.

1. Si $\inf A \notin A$, alors A n'admet pas de minimum.
2. Si $\sup A > \sup B$, alors $A \not\subseteq B$.
3. Si f n'est pas bornée sur A , alors $A \neq f(B)$.
Pour rappel, $f(B) = \{f(x) / x \in B\}$ et f est bornée sur A s'écrit : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, |f(a)| \leq M$.
4. Si A n'admet pas de borne supérieure, alors A est vide ou non majoré.
5. Si f n'est ni croissante, ni décroissante, alors f n'est pas monotone.

Exercice 2

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, xy = 1$.
2. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, xy = 1$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 0 \implies \exists y \in \mathbb{R}, x < y \wedge y > 1)$.
4. $\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}, x < y \implies y > 0$.

Correction.

1. Faux. Si $x = 0$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}, xy = 0$.
2. Faux. La négation de cette assertion est l'assertion

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, xy \neq 1.$$

Soit $y \in \mathbb{R}$, si $y = 0$, posons $x = 1$ et si $y \neq 0$, posons $x = \frac{2}{y}$. Dans les deux cas, $xy \neq 1$. La négation de l'assertion est démontrée.

3. Remarquons qu'on peut réécrire l'assertion sous la forme plus concise :

$$\forall x > 0, \exists y \in \mathbb{R}, x < y \wedge y > 1$$

Elle est vraie. Soit $x > 0$, $y = x + 1$ est un exemple possible validant l'assertion puisqu'alors $y > x$ et $y = x + 1 > 0 + 1 = 1$.

4. Vrai. Soit $x \in \mathbb{R}, y = x + 1$ est un exemple possible validant l'assertion.
5. Faux. La négation de cette assertion est l'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}, x < y \wedge y \leq 0.$$

Soit $x < 0$. En posant $y = 0$, on a bien $x < y$ et $y \leq 0$.

Exercice 3

Soient A et B deux sous ensembles minorés de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \cup B$ est minoré.

Correction.

Par définition : A est minoré si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall a \in A, m \leq a.$$

■ Méthode : pour montrer l'existence d'un objet, on construit le plus souvent un candidat explicite.

Tâtonnements : Partons d'un exemple : $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$, $A \cup B = [0, 2]$; 1 minore B mais pas $A \cup B$: un minorant de $A \cup B$ doit minorer A et B . Si on dispose d'un minorant de A et d'un minorant de B alors le minimum des deux sera un minorant de $A \cup B$.

Traduisons les hypothèses : Puisque A est minoré, il existe $m_A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $a \in A$, $m_A \leq a$. De même, puisque B est minoré, il existe $m_B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $b \in B$, $m_B \leq b$.

On aurait pu écrire ceci avec des quantificateurs : Puisque A et B sont minorés, on a

$$\exists m_A, m_B \in \mathbb{R}, \forall a \in A, \forall b \in B, m_A \leq a \text{ et } m_B \leq b.$$

Posons $m = \min(m_A, m_B)$ (m existe, c'est notre candidat) et montrons que m est un minorant de $A \cup B$, i.e. pour tout $x \in A \cup B$, $m \leq x$. En effet, soit $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ ou $x \in B$. Or, si $x \in A$, alors $m \leq m_A \leq x$ et si $x \in B$, alors $m \leq m_B \leq x$. Dans les deux cas, $m \leq x$ (donc m est bien un minorant de $A \cup B$). Ceci démontre que $A \cup B$ est minoré.

Exercice 4

Soient A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$ avec B majoré. Montrer que $A \cap B$ est majoré.

Correction.

Par définition : B est majoré si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall b \in B, b \leq M.$$

■ Méthode : pour montrer l'existence d'un majorant de $A \cap B$, construisons un candidat explicite.

On peut comme précédemment s'aider d'un exemple pour remarquer que tout majorant de B est aussi un majorant de $A \cap B$. Rappelons que $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / x \in A \text{ et } x \in B\}$.

On fait parler les hypothèses : Puisque B est majoré, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $b \in B$, $b \leq M$.

Alors pour tout $x \in A \cap B$, $x \leq M$ car $x \in B$. Ainsi, M est un majorant de $A \cap B$ et $A \cap B$ est bien majoré.

Exercice 5

Soient A , B et C trois sous ensembles de $\mathbb{R}$ tels que $A \subset B$ et $B \subset C$. Montrer que $A \subset C$.

Correction.

Par définition : $A \subset C$ si

$$\forall a \in A, a \in C.$$

Soit $a \in A$. Puisque $A \subset B$, $a \in B$. Puisque $a \in B$ et $B \subset C$, $a \in C$. Ainsi, $A \subset C$.

Exercice 6

Soit A un sous-ensemble infini de $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il contient une infinité d'entiers pairs ou une infinité d'entiers impairs.

Correction.

■ Méthode : la déduction semble peu évidente à rédiger, on essaie un raisonnement par l'absurde.

Supposons par l'absurde que A contient un nombre fini d'entiers pairs **et** un nombre fini d'entiers impairs. Montrons que A est fini, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. On peut introduire des variables et des notations pour expliciter le raisonnement.

Notons $A_p = \{a \in A / a \text{ est pair}\}$ et $A_i = \{a \in A / a \text{ est impair}\}$ les sous-ensembles de A contenant respectivement les éléments pairs et les éléments impairs. Puisque A_p et A_i sont supposés être des ensembles finis, notons $\#A_p$ et $\#A_i$ leurs cardinaux. Alors A_p et A_i sont disjoints et $A = A_p \sqcup A_i$ car $A \subset \mathbb{Z}$ et tout entier est soit pair soit impair. Ainsi, A est un ensemble fini dont le cardinal est donné par $\#A = \#(A_p \sqcup A_i) = \#A_p + \#A_i < \infty$. Contradiction.

Exercice 7

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\min(x, y) \leq \frac{x+y}{2} \leq \max(x, y)$.

Correction.

On veut montrer que la moyenne de deux nombres réels est comprise entre le minimum et le maximum des deux.

Par définition : $\min(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } x \geq y \end{cases}$ et $\max(x, y) = \begin{cases} y & \text{si } x \leq y \\ x & \text{si } x \geq y \end{cases}$.

Méthode : Pour s'alléger de l'indétermination sur les fonctions minimum, maximum et valeur absolue, on peut séparer l'étude selon les deux cas des définitions.

Si $x \leq y$, $\min(x, y) = x$, $\max(x, y) = y$. De plus, $x \leq y$ implique que $\frac{x+y}{2} \leq \frac{y+y}{2} = y$ et $\frac{x+y}{2} \geq \frac{x+x}{2} = x$ d'où $\min(x, y) = x \leq \frac{x+y}{2} \leq y = \max(x, y)$.

Si $x \geq y$, alors $x+y \leq 2x = 2\max(x, y)$ et $x+y \geq 2y = 2\min(x, y)$. D'où $\min(x, y) \leq \frac{x+y}{2} \leq \max(x, y)$. On obtient bien l'inégalité demandée dans les 2 cas.

Exercice 8 Caractérisation d'un ensemble borné.

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que A est borné si et seulement si

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, \quad m \leq a \leq M.$$

Correction.

On montre l'équivalence par double implication.

Par définition : un ensemble est borné s'il satisfait

$$\exists M_1 \in \mathbb{R}, \forall a \in A, \quad |a| \leq M_1.$$

La notation M est déjà fixée dans l'énoncé donc on introduit une notation différente.

Puisqu'il n'y a pas de valeur absolue dans l'assertion de l'énoncé, on réécrira cette définition sans valeur absolue. Par définition : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ ou encore $|x| = \max(x, -x)$. En particulier, $x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$.

($\Rightarrow$) Si A est borné, il existe M_1 tel que pour tout $a \in A$, $|a| \leq M_1$. On a donc pour tout $a \in A$, $a \leq M_1$ et $-a \leq M_1$ d'où $-M_1 \leq a$ et donc $-M_1 \leq a \leq M_1$. Alors pour $m = -M_1$ et $M = M_1$, on a bien

$$\forall a \in A, \quad m \leq a \leq M.$$

($\Leftarrow$) Réciproquement, soient $m, M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in A$, $m \leq a \leq M$. Alors $-M \leq -a \leq -m$ donc en posant $M_1 = \max(M, -m)$, on a $a \leq M_1$ et $-a \leq M_1$ d'où $|a| \leq M_1$. A est bien borné.

L'équivalence $|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$ est un résultat du cours que l'on peut utiliser sans justification. On en a refait la démonstration ici à titre d'entraînement.

Exercice 9

Donner, dans chacun des cas suivants et sans justification, des exemples de sous ensembles A et B de $\mathbb{R}$ distincts tels que

- | | |
|---|--|
| 1. $\inf A = \inf B$ et $\sup A = \sup B$ | 4. $\sup(A \cap B) \geq \sup(A \cup B)$ |
| 2. $A \subsetneq B$, $B \subsetneq A$, $\inf A = \inf B$ et $\sup A = \sup B$ | 5. $A \subset B$, $\sup A = \inf B$ |
| 3. $\min A = \min B$ et $\max A = \max B$ | 6.* $A \cap B = \emptyset$, ni A , ni B n'est minoré. |

Correction.

- Par exemple, $A = [0, 1]$ et $B =]0, 1[$ ou $B = [0, 1[$.
- $A = \{0\} \cup \{1\}$ et $B = [0, 1[$ ou $A =]0, 1[$ et $B = [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$.
- $A = \{0\} \cup \{1\}$ ou $A = [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ et $B = [0, 1]$.
- $A = [0, 1]$ et $B = [-1, 1]$. On pourrait montrer que $\sup(A \cap B) \leq \sup(A \cup B)$ car $(A \cap B) \subset (A \cup B)$, d'où nécessairement l'égalité ici.
- $A = \{0\}$ et $B = [0, 1]$. On pourrait montrer que $\inf B \leq \inf A$ car $A \subset B$, d'où ici $\sup A = \inf B \leq \inf A$. Or, on a toujours $\inf A \leq \sup A$ d'où $\inf A = \sup A$ et donc A est nécessairement réduit à un point.
- $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Ou encore $A = \{-2n / n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{-(2n+1) / n \in \mathbb{N}\}$.

Révisions et approfondissement.

Exercice 10

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+k}$.
2. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n.$$

Correction.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $A_n \subset A_{n+k}$. Pour $k = 0$, on a bien $A_n \subset A_n$. Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons $A_n \subset A_{n+k}$, alors d'après l'énoncé, $A_{n+k} \subset A_{n+k+1}$ d'où par transitivité de l'inclusion, $A_n \subset A_{n+k+1}$. Ceci achève la récurrence.
2. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. **Par définition :** $\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n = \{x \in \mathbb{R} / \exists n \geq N, x \in A_n\}$. Montrons cette égalité par double inclusion.

($\subset$) Soit $x \in \bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n$. Il existe alors $n_0 \geq N$ tel que $x \in A_{n_0}$. Puisque $n_0 \geq 0$, $x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ d'où la première inclusion.

($\supset$) Soit $x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. Il existe alors $n_0 \geq 0$ tel que $x \in A_{n_0}$. Si $n_0 \geq N$, alors $x \in \bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n$. Sinon $x \in A_N$ car

$A_{n_0} \subset A_N$ et donc $x \in \bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n$. Ceci montre la deuxième inclusion.

Finalement, $\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

Exercice 11

Soient a et b deux réels distincts. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x - a| = |x - b|$.

Correction.

Interprétation : $|x - a|$ est la distance entre a et b . Ainsi, $x \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation si et seulement si x est à égale distance de a et de b , autrement dit x est le point médian entre a et b .

Méthode : pour ôter les valeurs absolues, on raisonne par cas.

Puisque l'on peut échanger a et b , supposons que $a < b$. Raisonnons par cas :

- Si $x \leq a$, alors $x \leq a < b$ donc $|x - a| = a - x < b - x = |b - x|$. x n'est donc pas solution.
- Si $a \leq x \leq b$, l'équation devient $x - a = b - x$, équivalente à $2x = a + b$, donc l'unique solution est $x = \frac{a+b}{2}$.
- Si $b \leq x$, alors $a < b \leq x$ donc $|x - a| = x - a > x - b = |b - x|$. x n'est donc pas solution.

L'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation est donc le point médian $x = \frac{a+b}{2}$.

Remarque : si $a = b$ alors tout $x \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation.

Exercice 12

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer qu'il existe $a', b' \in \mathbb{R}$ tels que $a' < b'$ et $[a', b'] \subset]a, b[$.

Correction.

Interprétation : en traçant les variables sur l'axe réel, on peut reformuler le problème. Il s'agit de montrer qu'il existe $a', b' \in \mathbb{R}$ tels que $a < a' < b' < b$.

■ Méthode 1 : pour montrer l'existence d'une variable, on en construit un candidat explicite.

Puisque $a < b$, en posant $a' = \frac{a+b}{2}$ (moyenne de a et b), on a $a < a' < b$. De même, en posant $b' = \frac{a'+b}{2}$, on a $a' < b' < b$. Ainsi, $a < a' < b' < b$ donc $[a', b'] \subset]a, b[$.

■ Méthode 2 : on utilise le lemme de réécriture.

Puisque $a < b$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a < a + \varepsilon < b$. Posons alors $a' = a + \varepsilon$. Puisque $a' < b$, il existe $\varepsilon' > 0$ tel que $a' < a' + \varepsilon' < b$. Posons alors $b' = a' + \varepsilon'$. On a bien $a < a' < b' < b$ donc $[a', b'] \subset]a, b[$.

Exercice 13

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$[a + \varepsilon, a + 2\varepsilon] \cap [b, +\infty[= \emptyset.$$

Correction.

Interprétation : en traçant les variables sur l'axe réel, on peut remarquer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a toujours $a < a + \varepsilon < a + 2\varepsilon$. Il s'agit de montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a + 2\varepsilon < b$ ou autrement dit, $[a + \varepsilon, a + 2\varepsilon] \subset]a, b[$.

■ Méthode 1 : pour montrer l'existence d'une variable, on en construit un candidat explicite.

Puisque $a < b$, notons $L = b - a$ la longueur du segment $[a, b]$. En posant $\varepsilon = \frac{L}{3}$, on a bien $\varepsilon > 0$ et $a < a + \varepsilon < a + 2\varepsilon = a + \frac{2}{3}L < a + L = b$ d'où l'existence d'un ε satisfaisant les conditions de l'énoncé.

■ Méthode 2 : on utilise le lemme de réécriture.

Puisque $a < b$, il existe $\varepsilon' > 0$ tel que $a < a + \varepsilon' < b$. Posons alors $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2}$ de sorte que $\varepsilon > 0$ et $a < a + \varepsilon < a + 2\varepsilon = a + \varepsilon' < b$ d'où l'existence d'un ε satisfaisant les conditions de l'énoncé.

Exercice 14

Soient $a, b, x \in \mathbb{R}$ tels que $x < a + b$. Montrer qu'il existe $x_a, x_b \in \mathbb{R}$ tels que $x_a < a$, $x_b < b$ et $x = x_a + x_b$.

Correction.

■ Méthode 1, on s'inspire d'un exemple : $a = 1$, $b = 2$ et $x = 2.9$ alors $x_a = 0.95$ et $x_b = 1.95$ conviennent ; l'écart de $\varepsilon = 0.1$ entre x et $a + b$ est partagé en deux écarts plus petits de 0.05.

Notons $\varepsilon = a + b - x$ l'écart entre x et $a + b$ de sorte que $\varepsilon > 0$. On peut alors poser $x_a = a - \varepsilon/2$ et $x_b = b - \varepsilon/2$. En effet, $x_a < a$, $x_b < b$ et $x_a + x_b = a + b - \varepsilon = x$.

■ Méthode 2 : l'hypothèse est une inégalité et on cherche à montrer une égalité. On utilise la caractérisation des relations d'ordre par le lemme de réécriture puis on isole x pour construire la décomposition recherchée.

Puisque $x < a + b$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x + \varepsilon = a + b$. Ainsi, $x = a + b - \varepsilon = (a - \varepsilon/2) + (b - \varepsilon/2)$. De sorte que $x_a = a - \varepsilon/2$ et $x_b = b - \varepsilon/2$ conviennent car $\varepsilon > 0$.

Exercice 15

Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1. $A = \{\min(|x|, 3) / x \in \mathbb{R}\}.$
2. $A = \bigcup_{k \in \{0, 1, 2\}} \left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2} \right].$
3. $A = \{\cos(2x) / x \in \mathbb{R}_-\}.$

Correction.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\min(|x|, 3) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \leq 3 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases} = [0, 3]$ donc $A = [0, 3]$. Ainsi, pour tout $a \in A$, $0 \leq a \leq 3$.

Or $0 \in A$ donc $\min A = \inf A = 0$ et $3 \in A$ donc $\max A = \sup A = 3$.

2. $A = [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \pi + \frac{\pi}{2}] \cup [2\pi, 2\pi + \frac{\pi}{2}]$. On a pour tout $a \in A$, $0 \leq a \leq 2\pi + \frac{\pi}{2}$. Or $0 \in A$ donc $\min A = \inf A = 0$ et $2\pi + \frac{\pi}{2} \in A$ donc $\max A = \sup A = 2\pi + \frac{\pi}{2}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ donc pour tout $a \in A$, $-1 \leq a \leq 1$. Or $1 \in A$ car pour $x = 0$ on a $x \in \mathbb{R}_-$ et $\cos 2x = 1$ donc $\max A = \sup A = 1$ et $-1 \in A$ car pour $x = -\frac{\pi}{2}$ on a $x \in \mathbb{R}_-$ et $\cos 2x = -1$ donc $\min A = \inf A = -1$.

Attention à bien choisir x dans $\mathbb{R}_-$ pour montrer que les bornes sont atteintes.

Exercice 16

On dit qu'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ satisfait la propriété (P) si l'assertion suivante est vraie

(P) $\forall z \in A, \exists x, y \in A, x < z < y.$

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Déterminer dans chacun des cas suivants si l'ensemble considéré satisfait la propriété (P).

a) $A_1 = \mathbb{N}$.

b) $A_2 =]a, b]$.

c) $A_3 =]a, b] \cup]b+1, b+2[$.

2. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble fini non vide. Déterminer si A satisfait (P).
3. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble borné non vide tel que $\inf(A) \notin A$ et $\sup(A) \notin A$. Déterminer si A satisfait (P).
4. Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles satisfaisant (P). Déterminer si $A \cup B$ satisfait nécessairement (P).
5. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble satisfaisant (P). Montrer que A n'est pas nécessairement un intervalle. Justifier que votre contre-exemple n'est pas un intervalle.

Correction.

1. a) $A_1 = \mathbb{N}$ ne satisfait pas (P). En effet, pour $z = 0$, il n'existe aucun $x \in A_1$ tel que $x < z$.
 b) $A_2 =]a, b]$ ne satisfait pas (P). En effet, pour $z = b$, il n'existe aucun $y \in A_1$ tel que $z < y$.
 c) $A_3 =]a, b] \cup]b+1, b+2[$ satisfait (P). En effet, si $z \in]a, b]$, alors pour $x = \frac{a+z}{2}$ et $y = b + \frac{3}{2}$, on a bien $x, y \in A$ et $x < z < y$. De même, si $z \in]b+1, b+2[$, alors pour $x = b$ et $y = \frac{z+b+2}{2}$, on a bien $x, y \in A$ et $x < z < y$.
2. Puisque A est fini et non vide, A admet un maximum. Notons $M = \max(A)$. Alors $M \in A$ et pour $z = M$, on a par définition que pour tout $y \in A$, $y \leq z$. Donc A ne satisfait pas (P).
3. Remarquons que puisque A est borné et non vide, les théorèmes d'existence des bornes supérieures et inférieures garantissent que $\sup(A)$ et $\inf(A)$ sont bien définis. A satisfait (P). En effet, soit $z \in A$. Puisque $\inf(A) \notin A$, $\inf(A) < z$ et d'après la caractérisation de la borne inférieure, pour $\varepsilon = z - \inf(A)$, il existe $y \in A$ tel que $\inf(A) \leq y < z$. De même, puisque $\sup(A) \notin A$, il existe $x \in A$ tel que $z < x \leq \sup(A)$. On a donc bien montré qu'il existe $x, y \in A$ tels que $x < z < y$.
 Alternativement, par l'absurde si pour tout $x \in A$, on a $z \leq x$, alors z est le minimum de A , car $z \in A$, et donc $\inf(A) = z \in A$. Contradiction avec $\inf(A) \notin A$. Ainsi il existe $x \in A$ tel que $x < z$. De même, on justifie qu'il existe $y \in A$ tel que $z < y$ en utilisant cette fois que $\sup(A) \notin A$.
4. Oui, $A \cup B$ satisfait nécessairement (P). En effet, soit $z \in A \cup B$. Si $z \in A$, alors par hypothèse sur A , il existe $x, y \in A$ tels que $x < y < z$. En particulier, $x, y \in A \cup B$. Si $z \in B$, il existe de même $x, y \in B \subset A \cup B$ tels que $x < y < z$.
5. L'exemple A_3 de la question 1 fournit un contre-exemple. Ce n'est pas un intervalle car pour $x = b$, $z = b + \frac{1}{2}$, $y = \frac{z+b+2}{2}$, on a $x, y \in A_3$, $x \leq z \leq y$ et $z \notin A_3$. On aurait aussi pu considérer l'ensemble $A = \mathbb{Z}$.

Exercice 17 (Cours : Lien entre minimum et borne inférieure)

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que A admet un minimum si et seulement si A admet une borne inférieure et $\inf(A) \in A$, auquel cas $\min(A) = \inf(A)$.

Correction.

Utilisons les définitions :

- m est le minimum de A si $m \in A$ et m est un minorant de A ,
- $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A .

On montre l'équivalence par double implication.

($\Rightarrow$) Si A admet un minimum, alors A est minoré et non vide car $\min A \in A$ donc par la propriété de la borne inférieure, A admet une borne inférieure. Montrons que $\inf(A) = \min(A)$, ce qui impliquera immédiatement que $\inf A \in A$.

■ Méthode : Pour montrer une égalité (ici $\inf(A) = \min(A)$), on peut raisonner par double inégalité.

($\leq$) Comme $\min(A)$ est un minorant et que $\inf(A)$ est le plus grand des minorants, on a $\min(A) \leq \inf(A)$.
 ($\geq$) Puisque $\inf(A)$ est un minorant de A et que $\min(A) \in A$, on a $\inf(A) \leq \min(A)$. D'où $\inf(A) = \min(A)$.

($\Leftarrow$) Si $\inf(A) \in A$, alors $\inf(A)$ étant un minorant de A , il satisfait la définition du minimum de A donc $\min(A)$ existe et vaut $\inf(A)$.

Exercice 18

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $A =]a, +\infty[$ et on note $\underline{\mathcal{M}}(A)$ l'ensemble des minorants de A . Donner la définition ensembliste de $\underline{\mathcal{M}}(]a, +\infty[)$ puis déterminer cet ensemble.

Correction.

Par définition, $\underline{M}(A) = \{m \in \mathbb{R} / m \text{ est un minorant de } A\} = \{m \in \mathbb{R} / \forall x \in A, m \leq x\}$ (attention, a est fixé par l'énoncé, on ne peut pas écrire pour tout $a \in A$ ici).

Montrons que $\underline{M}(A) =]-\infty, a]$ par double inclusion.

($\subset$) Soit m un minorant de A et supposons par l'absurde que $m > a$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $a < a + \varepsilon < m$. Or $a + \varepsilon \in]a, +\infty[$, ce qui contredit que m soit un minorant de $A =]a, +\infty[$. Ainsi, $m \leq a$ et $\underline{M}(A) \subset]-\infty, a]$.

($\supset$) Soit $y \in]-\infty, a]$. On a pour tout $x \in A$, $x > a \geq y$ donc $y < x$. Ainsi, y est un minorant de A .

Exercice 19

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall a \in A, \forall b \in B, \quad a \leq b.$$

Peut-on déduire les assertions suivantes :

1. $A \cap B = \emptyset$.
2. $B \neq \mathbb{R}$.
3. $\sup(A) \in B$.
4. $\forall b \in B, \sup(A) \leq b$.
5. $\sup(A) \leq \inf(B)$.
6. $\inf(A) \leq \inf(B)$.

Correction.

Donnons des exemples : Si $A = [0, 1]$, $B = [2, 3]$ et $B = [1, 2]$ conviennent mais pas $B = [0.5, 2]$.

Sauf mention explicite, on attend pour tout exercice des réponses justifiées (par démonstration ou par construction de contre-exemples).

1. Non, $A = [0, 1]$ et $B = [1, 2]$ en est un contre-exemple.

Attention, l'assertion $A \cap B = \emptyset$ est parfois vraie (par exemple pour $A = [0, 1]$ et $B = [2, 3]$). En revanche, l'assertion "Si A et B vérifient les hypothèses de l'énoncé alors $A \cap B = \emptyset$ " est fausse.

2. Oui. $A = \emptyset$ et $B = \mathbb{R}$ pourraient convenir si l'énoncé ne supposait pas A non vide.

En effet, puisque A est non vide, il existe $a \in A$ tel que pour tout $b \in B$, $a \leq b$ donc B est minoré par a . Pour montrer que $B \neq \mathbb{R}$, construisons un réel qui n'est pas dans B (i.e. montrons que $\mathbb{R}$ n'est pas inclus dans B). Par conséquent, $a - 1 \notin B$ donc $B \neq \mathbb{R}$.

3. Non. $A = [0, 1]$ et $B = [2, 3]$ en est un contre-exemple.

4. Oui. B étant non vide, A est majoré donc d'après la propriété de la borne supérieure, $\sup(A)$ existe car A est également non vide.

Par définition : $\sup(A)$ est le plus petit majorant de A .

L'hypothèse nous dit que tout élément de B est un majorant de A .

Soit $b \in B$. D'après l'hypothèse, on a pour tout $a \in A$, $a \leq b$. Donc b est un majorant de A , d'où $\sup(A) \leq b$.

5. Oui. A étant non vide, B est minoré donc d'après la propriété de la borne inférieure, $\inf B$ existe car B est également non vide.

Par définition : $\inf B$ est le plus petit majorant de B .

On a montré à la question précédente que pour tout $b \in B$, on a $\sup(A) \leq b$. D'où $\sup(A)$ est un minorant de B et donc $\sup(A) \leq \inf B$.

6. C'est un piège ! L'inégalité est vraie d'après 5. sous réserve que A admette une borne inférieure, auquel cas $\inf A \leq \sup A$. Cependant, $A =]-\infty, 0]$ et $B = [0, 1]$ donne un contre-exemple.

Exercice 20

Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1. $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 5\}$
2. $A = \{\det(M^2) / M \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})\}$.

Correction.

Méthode : on commence par chercher un encadrement éventuel des éléments de A (aussi optimal que possible).

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 < 5 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{5}$ donc pour tout $x \in A$, $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$.

A est non vide et borné donc d'après la propriété de la borne supérieure et la propriété de la borne inférieure, A admet une borne inférieure et une borne supérieure.

On a $\sup(A) \leq \sqrt{5}$. Notons $y = \sup(A)$ et supposons par l'absurde que $y < \sqrt{5}$. Pour construire un élément de A non majoré par y , prenons le point médian entre y et $\sqrt{5}$. On a nécessairement $y > 0$, sinon y ne

majoré pas $1 \in A$. Posons alors $x = \frac{y+\sqrt{5}}{2}$, alors $0 < y < x < \sqrt{5}$ et l'élévation au carré étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, $x^2 < 5$. Ainsi $x \in A$ et $y < x$ donc y ne majoré pas A . Contradiction. Finalement, $\sup(A) = \sqrt{5}$ et puisque $\sup(A) \notin A$, A n'admet pas de maximum.

De même, on a $\inf(A) \geq \sqrt{5}$. Notons encore $y = \inf(A)$ et supposons par l'absurde que $y > -\sqrt{5}$. On a nécessairement $y < 0$, sinon y ne minore pas $-1 \in A$. Posons alors $x = \frac{-\sqrt{5}+y}{2}$ alors $-\sqrt{5} < x < y < 0$ et l'élévation au carré étant décroissante sur $\mathbb{R}_-$, $x^2 < 5$. Ainsi, $x \in A$ et $y > x$ donc y ne minore pas A . Contradiction. Finalement, $\inf(A) = -\sqrt{5}$ et puisque $\inf(A) \notin A$, A n'admet pas de minimum.

2. On a pour tout $M \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, $\det(M^2) = \det(M)^2 \geq 0$. De plus, si $M = \alpha I_3$ avec I_3 la matrice identité, alors $\det(M) = \alpha^3$ et $\det(M^2) = \alpha^6$. On peut donc construire des matrices de déterminant aussi grand que l'on le souhaite. Ainsi, un premier encadrement de A est pour tout $a \in A$, $0 \leq a < +\infty$.

On a bien $0 \in A$ car la matrice nulle vérifie $\det(M^2) = 0$. Ainsi, A admet un minimum et donc une borne inférieure et on a $\min(A) = \inf(A) = 0$.

Supposons par l'absurde que A est majoré. Alors il existe $c \geq 0$ tel que $\forall a \in A$, $a \leq c$ donc $\forall M \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, $\det(M^2) \leq c$. Or en considérant $M = (c+1)I_3$, on a $\det(M^2) = (c+1)^6 > c$. Ceci contredit l'hypothèse que c est un majorant de A . Ainsi, A n'admet ni maximum ni borne supérieure.

Attention : si $c \in]0, 1[$, $c^2 < c$. Pour prendre $M = cI_3$ comme contre-exemple il faut au préalable exclure le cas $c < 1$ en remarquant que pour $M = I_3$, $\det(M^2) = 1$ donc $1 \in A$ donc $c \geq 1$.

Exercice 21

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$.

On suppose que $a < b$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) < g(x)$.

1. On note $y_\lambda = \lambda a + (1 - \lambda)b$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer y_0 , y_1 , $y_{\frac{1}{2}}$ et $y_{\frac{1}{3}}$.

Montrer que $\{\lambda a + (1 - \lambda)b / \lambda \in [0, 1]\} = [a, b]$.

2. Montrer qu'il existe une fonction continue h définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) < h(x) < g(x)$.

3. En déduire un ensemble infini de fonctions vérifiant les mêmes propriétés que h .

4. ★★ Donner un exemple de telles fonctions f et g pour lesquelles il n'existe aucun $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + \varepsilon < g(x)$.

Correction.

1. On a $y_0 = a$, $y_1 = b$ et $y_{\frac{1}{2}} = \frac{a+b}{2}$ est la moyenne de a et b . Enfin, $y_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$ est la moyenne pondérée de a et b , de coefficients respectifs $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Nous allons montrer que faire varier λ dans $[0, 1]$ construit des réels dans $[a, b]$ (et qu'on retrouve même tout l'intervalle $[a, b]$).

■ Méthode : on montre l'égalité entre deux ensembles par double inclusion.

Notons $I = \{\lambda a + (1 - \lambda)b / \lambda \in [0, 1]\}$.

($\subset$) Montrons que $I \subset [a, b]$, autrement dit que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $a \leq \lambda a + (1 - \lambda)b \leq b$. On a $a < b$ donc pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda a \leq \lambda b$ car $\lambda \geq 0$ et $(1 - \lambda)a \leq (1 - \lambda)b$ car $1 - \lambda \geq 0$ d'où

$$\lambda a + (1 - \lambda)b \geq \lambda a + (1 - \lambda)a = a \quad \text{et} \quad \lambda a + (1 - \lambda)b \leq \lambda b + (1 - \lambda)b = b.$$

Ainsi pour tout $x \in I$, $a \leq x \leq b$ i.e. $x \in [a, b]$ et donc $I \subset [a, b]$.

($\supset$) Soit $x \in [a, b]$, montrons que $x \in I$, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$. Or

$$x = \lambda a + (1 - \lambda)b \Leftrightarrow x - b = \lambda(a - b) \Leftrightarrow \lambda = \frac{x - b}{a - b}.$$

Posons donc $\lambda = \frac{x-b}{a-b}$ et vérifions que $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons pour hypothèses $a < b$ et $a \leq x \leq b$ donc $\frac{1}{a-b} < 0$ et $\frac{a}{a-b} \geq \frac{x}{a-b} \geq \frac{b}{a-b}$ d'où $\frac{a-b}{a-b} \geq \frac{x-b}{a-b} \geq \frac{b-b}{a-b}$ i.e. $1 \geq \lambda \geq 0$ et $x \in I$.

Conclusion : $I \subset [a, b]$ et $[a, b] \subset I$ donc $I = [a, b]$.

2. Indication : rappelons $x < y$ si et seulement si $\exists z, x < z < y$. Cette question est une forme de généralisation du sens direct de cette équivalence.

■ Méthode : pour montrer l'existence d'un objet, on construit le plus souvent un candidat explicite.

Prenons par exemple, deux fonctions constantes, $f \equiv a$, $g \equiv b$ avec $a < b$ alors $h \equiv (a + b)/2$ convient.

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = (f(x) + g(x))/2$. Alors h est continue comme combinaison linéaire de deux fonctions continues et on a bien $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) < h(x) < g(x)$.

3. Le choix précédent pour h de prendre exactement la moyenne est arbitraire. La question 1 nous donne une indication pour faire une moyenne pondérée de f et g . Soit $h_\lambda : x \mapsto \lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x)$ pour $\lambda \in]0, 1[$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x) < h_\lambda(x) < \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(x) = g(x).$$

Ainsi, $\{h_\lambda / \lambda \in]0, 1[\}$ est un ensemble infini de fonctions continues strictement comprises en f et g .

Exemple : considérons $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x + 1$. Alors $h_\lambda : x \mapsto \lambda x + (1 - \lambda)(x + 1) = x + (1 - \lambda)$. Les graphes des fonctions h_λ sont toutes les droites parallèles à la droite d'équation $y = x$ et strictement comprises entre celle-ci et la droite d'équation $y = x + 1$. Remarquons plus généralement que plus λ est grand, plus h_λ est proche de f et inversement, plus λ est petit, plus h_λ est proche de g .

4. Cette question est un peu plus délicate. Il faut construire deux fonctions f et g qui se rapprochent l'une de l'autre, *i.e.* dont la différence tend vers 0 mais sans jamais se toucher. Pour des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, cela n'est possible qu'au voisinage de plus ou moins l'infini.

Posons par exemple, $f \equiv 0$ et $g : x \mapsto e^{-x}$. On a bien $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < g(x)$. Supposons par l'absurde qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \varepsilon < g(x)$ donc tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \varepsilon < g(x)$ (car $f \equiv 0$). Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$,

donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) < \varepsilon$. Contradiction.

Il n'est pas aisé de comprendre pourquoi on ne peut pas généraliser ici l'équivalence " $x < y$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x + \varepsilon < y$ ". Ce sera une question centrale du cours de Topologie de 3e année de Licence Mathématiques!

Exercice 22

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}_+$. Soit $A \cdot B = \{x \in \mathbb{R} / \exists a \in A, \exists b \in B, x = ab\}$. Montrer que $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \sup(B)$.

Correction.

On procède par double inégalité. Posons $M = \sup(A) \sup(B)$.

($\leq$) A et B étant non vides et majorées, elles admettent des bornes supérieures par la propriété de la borne supérieure. Pour tout $a \in A$, on a $a \leq \sup(A)$ (comme $\sup(A)$ est un majorant de A). Ainsi pour tout $b \in B$, $ab \leq \sup(A)b$, puisque $b \geq 0$. Notez l'importance de l'hypothèse $B \subset \mathbb{R}_+$ qui permet d'assurer la conservation du sens de l'inégalité. Également, comme $A \subset \mathbb{R}_+$, on a 0 minorant de A , donc $0 \leq \sup(A)$. Par conséquent, pour tout $b \in B$, $\sup(A)b \leq \sup(A) \sup(B)$. On a donc montré que pour tout $(a, b) \in A \times B$, $ab \leq M$, d'où M est un majorant de $A \cdot B$, qui est non vide donc admet une borne supérieure et $M \leq \sup(A) \sup(B)$.

($\geq$) Par définition des bornes supérieures de A et B , on peut construire des éléments $a \in A$ et $b \in B$ aussi proches que l'on souhaite de $\sup(A)$ et $\sup(B)$ respectivement, de sorte que ab est aussi proche que l'on veut de $\sup(A) \sup(B)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par la caractérisation de la borne supérieure, il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $\sup(A) - \varepsilon < a$ et $\sup(B) - \varepsilon < b$. Ainsi

$$(1) \quad M < (a + \varepsilon)(b + \varepsilon) = ab + \varepsilon(a + b) + \varepsilon^2 \leq ab + \varepsilon(\sup(A) + \sup(B)) + \varepsilon^2.$$

Cette équation est de la forme $M < ab + \varepsilon'$ avec ε' aussi petit que l'on veut. Soit $\varepsilon' > 0$, l'équation (1) étant vraiment pour tout $\varepsilon > 0$, on a pour ε suffisamment petit, $\varepsilon(\sup(A) + \sup(B)) + \varepsilon^2 < \varepsilon'$. Ainsi $M - \varepsilon' < ab$ et par la caractérisation de la borne supérieure, on a directement $\sup(A \cdot B) = M$. On a réussi à approcher de manière arbitrairement proche le majorant M de $A \cdot B$ par des éléments de $A \cdot B$, par conséquent $M = \sup(A \cdot B)$.

Licence 2^{ème} année, Mathématiques et Applications
ANALYSE 3

Feuille de TD n°2

Suites réelles et complexes : convergence, limites et inégalités.

Exercices complémentaires d'entraînement

Exercices de prise en main.

Exercice 1

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

1. On suppose que u est décroissante à partir du rang 5 et v est décroissante à partir du rang 9. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $u + v$ est décroissante.
2. On suppose que u est minorée à partir du rang 3 et v est positive à partir du rang 2. Montrer que $u + v$ est minorée.

Correction.

1. Pour tout $n \geq 5$, $u_{n+1} \leq u_n$ et pour tout $n \geq 9$, $v_{n+1} \leq v_n$ donc pour tout $n \geq 9$,

$$u_{n+1} + v_{n+1} \leq u_n + v_{n+1} \leq u_n + v_n.$$

Ainsi, $u + v$ est décroissante à partir du rang 9.

2. Il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq 3$, $u_n \geq m$. Posons $m_u = \min\{u_0, u_1, u_2, m\}$. Ce minimum est bien défini puisque l'ensemble est fini. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m_u$. De plus, pour tout $n \geq 2$, $v_n \geq 0$. Posons $m_v = \min\{v_0, v_1, 0\}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq m_v$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n \geq m_u + m_v$. Autrement dit, $u + v$ est minorée (par $m_u + m_v$).

On a démontré dans un cas particulier qu'une suite minorée APCR est minorée.

Exercice 2

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante. Montrer que $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ existe et donner sa valeur.

Correction.

Puisque u est décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$ et par récurrence immédiate, $u_0 \geq u_n$. En particulier, u_0 est un majorant de $A = \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$. Or $u_0 \in A$ donc $\max(A) = u_0$ d'où $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sup(A) = \max(A) = u_0$.

Exercice 3

Soient $\varepsilon > 0$ et $M \in \mathbb{R}$. Déterminer dans chacun des cas suivants le plus petit rang à partir duquel la propriété énoncée est vraie ou le plus grand rang jusqu'auquel la propriété énoncée est vraie.

1. $|u_n| < \varepsilon$, avec $u_n = \frac{3}{n^2+5}$
2. $u_n \geq M$, avec $u_n = 4 - n^2$
3. $u_n > 1$, avec $u_n = \tan(\frac{n\pi}{2n+9})$
4. $u_n < M$, avec $u_n = \ln(n)$

Correction.

On note N le rang recherché.

1. La suite est définie sur $\mathbb{N}$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, montrons que la propriété est vraie à partir d'un certain rang.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n| < \varepsilon \iff \frac{3}{n^2+5} < \varepsilon \iff n^2 > \frac{3}{\varepsilon} - 5.$$

Attention à ne pas appliquer une racine à une quantité strictement négative. Notons $x_\varepsilon = \frac{3}{\varepsilon} - 5$.

◇ Si $x_\varepsilon < 0$, l'inégalité est toujours vraie, donc $N = 0$: pour tout $n \geq N = 0$, on a bien $n^2 \geq 0 > x_\varepsilon$.

◇ Si $x_\varepsilon \geq 0$, alors

$$|u_n| < \varepsilon \iff n > \sqrt{x_\varepsilon},$$

et cette inégalité est vraie à partir du rang $N = E(\sqrt{x_\varepsilon}) + 1 \in \mathbb{N}^*$ qui est le plus petit entier strictement plus grand que $\sqrt{x_\varepsilon} \geq 0$.

2. La suite u est définie sur $\mathbb{N}$ et tend vers $-\infty$. Montrons donc que la propriété est éventuellement vraie jusqu'à un certain rang. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $4 - n^2 \geq M \iff n^2 \leq 4 - M$. Donc si $4 - M \leq 0$, la propriété n'est jamais vérifiée. Sinon on a

$$n^2 \leq 4 - M \iff n \leq \sqrt{4 - M} \iff n \leq E(\sqrt{4 - M}).$$

Le cas échéant, pour $N = E(\sqrt{4 - M})$ on a pour tout $n \leq N$, $u_n \geq M$.

3. La suite v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{n\pi}{2n+9} = \frac{\pi}{2} \frac{2n}{2n+9} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{9}{2n+9}\right)$ est strictement croissante et tend vers $\frac{\pi}{2}$. Donc u est définie sur $\mathbb{N}$ et puisque $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$, on a par composition des limites

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tan(v_n) = +\infty$. Montrons donc que la propriété est vraie à partir d'un certain rang. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\tan\left(\frac{n\pi}{2n+9}\right) > 1 \iff \frac{n\pi}{2n+9} > \frac{\pi}{4} \iff 4n > 2n+9 \iff n > 9/2.$$

Ainsi $u_n > 1$ est vraie pour tout indice n supérieur ou égal à $N = E(9/2) + 1 = 5$.

4. La suite u est définie sur $\mathbb{N}^*$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, donc montrons que la propriété est vraie jusqu'à un certain rang. Cherchons donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \leq N$, $u_n < M$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_n < M \iff n < e^M$ donc si $e^M \leq 1$ l'inégalité n'est jamais vérifiée. Supposons maintenant que $e^M > 1$ et cherchons N tel que pour tout $n \leq N$, $n < e^M$. Si $e^M \in \mathbb{N}$, le plus petit entier strictement inférieur à e^M est $N = e^M - 1$, sinon c'est $N = E(e^M)$.

Exercice 4

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}) \iff (\forall n, p \in \mathbb{N}, n < p \Rightarrow u_n < u_p).$$

Correction.

■ On montre cette équivalence par une double implication.

($\Leftarrow$) Supposons que

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, n < p \Rightarrow u_n < u_p$$

alors l'inégalité $u_n < u_p$ est en particulier vraie pour $p = n + 1$ car $n < n + 1$.

($\Rightarrow$) Supposons que

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}.$$

Il reste à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, si $n < p$, alors $u_n < u_p$. Ce "pour tout" appelle à une récurrence. La propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+k}$$

s'obtient par récurrence immédiate sur $k \in \mathbb{N}^*$ à partir de l'hypothèse (1). Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $p \in \mathbb{N}$, si $p > n$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = n + k$. D'où $u_n < u_p$.

Exercice 5

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Montrer que si u est croissante et v minorée, alors $u + v$ est minorée.

2. On suppose que u est croissante et f décroissante. Montrer que $v = f(u)$ est monotone.

3. On suppose que u est majorée à partir d'un certain rang. Montrer que u est majorée.

4. On suppose que u est bornée à partir d'un certain rang. Montrer que u est bornée.

5. Montrer que si u est minorée, alors $v = e^{-u}$ est majorée.

6. Montrer que si u est croissante et positive et v négative et décroissante, alors uv est décroissante.

Correction.

Méthode : on réécrit les hypothèses et leurs définitions. (On n'hésite pas à écrire en langage mathématique l'objectif pour clarifier ce qu'il faut démontrer)

1. Supposons u croissante et v minorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ et il existe $m_v \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_v \leq v_n$.

On cherche à minorer $u_n + v_n$ indépendamment de n . Il reste donc à minorer u_n .

Par récurrence immédiate, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n$ d'où $u_0 + m_v \leq u_n + v_n$. Ainsi, $m = u_0 + m_v$ est un minorant de $u + v$, d'où $u + v$ est minorée.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$, $f(x) \geq f(y)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = f(u_n) \geq f(u_{n+1}) = v_{n+1}$. Autrement dit, v est décroissante donc monotone.

3. Puisque u est majorée à partir d'un certain rang, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq M$. Il reste à majorer les N premiers termes de u . Ils sont en nombre fini donc le maximum de cet ensemble existe.

Notons $M_0 = \max(\{u_n / n \in \mathbb{N}, n < N\})$. M_0 est bien défini car un ensemble fini admet un maximum. Pour tout $n < N$, $u_n \leq M_0$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \max(M_0, M)$. u est donc majorée par $\max(M_0, M)$.

4. On pourrait symétriser la question précédente avec la propriété d'être minoré et conclure que u étant majorée et minorée, u est bornée. Optons ici pour une démonstration directe du caractère borné. Il s'agit de la même démonstration que la précédente pour la suite $|u|$.

Puisque u est bornée à partir d'un certain rang, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq M$. Notons $M_0 = \max(\{|u_n| / n \in \mathbb{N}, n < N\})$. M_0 est bien défini car un ensemble fini admet un maximum. Pour tout $n < N$, $|u_n| \leq M_0$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \max(M_0, M)$. u est donc bornée par $\max(M_0, M)$.

5. Supposons u minorée. Alors il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq 0$, $m \leq u_n$. Puisque $t \mapsto e^{-t}$ est décroissante, on a pour tout $n \geq 0$, $v_n = e^{-u_n} \leq e^{-m}$. Ainsi, v est majorée par e^{-m} .

6. Supposons que u est croissante et positive et que v est négative et décroissante. On a alors pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq u_{n+1}$ d'où $u_n v_n \geq u_{n+1} v_n$ car v est négative et $u_n v_n \geq u_{n+1} v_n \geq u_{n+1} v_{n+1}$ car v est décroissante et u est positive. Donc uv est décroissante.

Exercice 6

Soient $\ell \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrer que la suite z converge vers ℓ si et seulement si la suite $\bar{z}$ converge vers $\bar{\ell}$.

Correction.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \Re(z_n)$ et $y_n = \Im(z_n)$. Alors $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$. D'après le cours, z converge si et seulement si x et y convergent. En appliquant cette propriété à $\bar{z}$, $\bar{z}$ converge si et seulement si x et $-y$ convergent. Or y converge si et seulement si $-y$ converge. Par transitivité des équivalences, z converge si et seulement si $\bar{z}$ converge.

De plus, si z converge vers ℓ alors x converge vers $\Re(\ell)$ et y converge vers $\Im(\ell)$. De même, si $\bar{z}$ converge vers ℓ' alors x converge vers $\Re(\ell')$ et $-y$ converge vers $\Im(\ell')$. Par unicité de la limite, $\Re(\ell) = \Re(\ell')$ et $\Im(\ell) = -\Im(\ell')$, i.e. $\ell' = \bar{\ell}$.

Exercice 7

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante convergeant vers 0. Montrer que u est négative.

Correction.

Formalisons cet énoncé : La suite u converge vers 0 donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n| < \varepsilon.$$

Elle est croissante donc

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, n \leq p \Rightarrow u_n \leq u_p.$$

Si u admet un seul terme strictement positif, alors tous les termes suivants de la suite sont strictement positifs et donc intuitivement soit la suite décroît vers 0 soit elle ne tend pas vers 0. Raisonnons donc par l'absurde : Supposons par l'absurde qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > 0$. Alors pour tout $p \geq N$, $u_N \leq u_p$.

Combinons toutes les hypothèses : on a d'un côté $u_N \leq u_p$ et de l'autre, pour tout $\varepsilon > 0$, $|u_p| < \varepsilon$ sous réserve que p soit assez grand, d'où $u_N < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}u_N$. On a bien $\varepsilon > 0$. Puisque u converge vers 0, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq N_\varepsilon$, $|u_p| < \varepsilon$. Ainsi si $p \geq \max(N_\varepsilon, N)$, $u_N \leq u_p < \varepsilon = \frac{1}{2}u_N$. Contradiction.

La suite u est donc négative.

Exercice 8

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante. On suppose que $\max_{n \in \mathbb{N}} u_n$ existe. Montrer que u est stationnaire.

Correction.

Exemple : $u = (2, 3, \pi, 5, 8, 8, 8, 8, \dots)$. Si au rang N , la suite atteint son maximum, elle ne peut plus ni croître ni décroître puisqu'elle est croissante.

Notons $M = \max_{n \in \mathbb{N}} u_n = \max\{u_n / n \in \mathbb{N}\}$. Alors par définition du maximum, $M \in \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N = M$. De plus, M majore la suite donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$, i.e. $u_n \leq u_N$. Or u est croissante, donc pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, $u_n = u_N$ (par double inégalité) et u est donc stationnaire (de limite M).

Exercice 9

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite de limite $\ell \in \mathbb{K}$. Consigne : pour cet exercice, on n'utilisera aucune propriété sur la notion de limite autre que la définition.

1. Montrer que la suite $v = u - \ell$ tend vers 0.

2. Montrer que la suite $v = \frac{u}{3}$ tend vers $\frac{\ell}{3}$.

3. Montrer que la suite $v = u^2$ tend vers ℓ^2 .

Correction.

Notons $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La suite v converge vers ℓ_v si on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |v_n - \ell_v| < \varepsilon.$$

1. Posons $\ell_v = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \ell_v| = |u_n - \ell|$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque u converge vers ℓ , il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, $|v_n - \ell_v| = |u_n - \ell| < \varepsilon$.

2. Posons $\ell_v = \frac{\ell}{3}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \ell_v| = |\frac{u_n}{3} - \frac{\ell}{3}| = \frac{1}{3}|u_n - \ell|$. Soit $\varepsilon > 0$ et posons $\varepsilon' = 3\varepsilon$. Puisque u converge vers ℓ , il existe $N_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_{\varepsilon'}$, $|u_n - \ell| < \varepsilon'$. Ainsi, en posant $N_\varepsilon = N_{\varepsilon'}$, on a pour tout $n \geq N_\varepsilon$, $|v_n - \ell_v| < \varepsilon$.

3. Posons $\ell_v = \ell^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \ell_v| = |u_n^2 - \ell^2|$.

On doit majorer $|v_n - \ell_v|$ par une quantité qui ne dépend plus de n à partir d'un certain rang. Or on sait contrôler $|u_n - \ell|$. On fait donc apparaître cette quantité par l'identité remarquable :

$|v_n - \ell_v| = |u_n - \ell||u_n + \ell| \leq |u_n - \ell|(|u_n| + |\ell|) \leq |u_n - \ell|(\max_n |u_n| + |\ell|)$. On pourrait utiliser que u étant convergente, elle est bornée mais au vu des consignes de l'énoncé, on va à la place se ramener à nouveau à $|u_n - \ell|$:

$|v_n - \ell_v| = |u_n - \ell||u_n + \ell| = |u_n - \ell||u_n - \ell + 2\ell| \leq |u_n - \ell|(|u_n - \ell| + 2|\ell|)$. Soit maintenant $\varepsilon > 0$.

Cherchons $\varepsilon' > 0$ tel que $\varepsilon'^2 + 2\varepsilon'|\ell| \leq \varepsilon$. Par exemple, en imposant $\varepsilon'^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $2\varepsilon'|\ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $\varepsilon' = \min(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}, \frac{\varepsilon}{4|\ell|})$ si $\ell \neq 0$ et $\varepsilon' = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}$ sinon. Puisque u converge vers ℓ , il existe $N_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_{\varepsilon'}$, $|u_n - \ell| < \varepsilon'$. Ainsi, en posant $N_\varepsilon = N_{\varepsilon'}$, on a pour tout $n \geq N_\varepsilon$, $|v_n - \ell_v| < \varepsilon'^2 + 2\varepsilon'|\ell| \leq \varepsilon$.

Révisions et approfondissement.

Exercice 10

Soient $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $z_n = x_n + iy_n$. Montrer en utilisant uniquement la définition de limite que si z converge vers 0 alors x et y convergent vers 0.

Correction.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$, $|x_n| = |\Re(z_n)| \leq |z_n|$, $|y_n| = |\Im(z_n)| \leq |z_n|$.

Supposons que z converge vers 0 et soit $\varepsilon > 0$. On cherche $N_{x,\varepsilon}$ et $N_{y,\varepsilon}$ tels que

$$\forall n \geq N_{x,\varepsilon}, |x_n| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_{y,\varepsilon}, |y_n| < \varepsilon.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq |z_n|$ et $|y_n| \leq |z_n|$ et puisque z converge vers 0, il existe $N_{z,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_{z,\varepsilon}, |z_n| < \varepsilon.$$

Donc pour tout $n \geq N_{z,\varepsilon}$, $|x_n| \leq |z_n| < \varepsilon$ et $|y_n| \leq |z_n| < \varepsilon$. On peut donc poser $N_{x,\varepsilon} = N_{y,\varepsilon} = N_{z,\varepsilon}$.

Exercice 11 (Sur $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ - Partie 1)

1. Soit $\ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
2. En déduire que toute suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est stationnaire.

Correction.

1. On demande de démontrer un cas particulier de la propriété du cours suivante (du moins le sens direct) :

$$\ell \in]a, b[\iff \exists \varepsilon > 0,]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\subset]a, b[.$$

Notons $p = E(\ell)$ la partie entière de ℓ . Puisque $\ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a $p < \ell < p + 1$. Posons $\varepsilon_0 = \frac{\ell - p}{2}$ et $\varepsilon_1 = \frac{p + 1 - \ell}{2}$ alors $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ et

$$p < p + \varepsilon_0 = \ell - \varepsilon_0 < \ell < \ell + \varepsilon_1 = p + \varepsilon_1 < p + 1.$$

En particulier, $]\ell - \varepsilon_0, \ell + \varepsilon_1[\subset]p, p + 1[$. Pour centrer cet intervalle sur ℓ , on pose par exemple $\varepsilon = \min(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$. Ainsi, $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

2. Formalisons cet énoncé. Soit u une suite à valeurs entières (on pourrait noter $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ ou encore $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$), u est un cas particulier de suite réelle.

On explicite la définition de suite convergente. Puisque u est convergente, il existe $\ell \in \mathbb{R}$ telle que u tend vers ℓ . On a donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Rappelons que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ équivaut à $u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

On explicite le résultat à démontrer. u est stationnaire si et seulement si

$$\exists a \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n = a.$$

Si par l'absurde $\ell \notin \mathbb{Z}$ alors d'après la question précédente, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\subset E(\ell), E(\ell) + 1[\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Par convergence de u vers ℓ , il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, $u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, d'où en particulier $u_n \notin \mathbb{Z}$. Contradiction.

Ainsi $\ell \in \mathbb{Z}$. Soit alors $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, de sorte que ℓ est le seul entier de l'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. De nouveau par convergence de u vers ℓ , il existe N_ε tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, on a $u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, i.e. $u_n = \ell$ car u_n est entier. En d'autres termes, u est stationnaire.

Exercice 12 (Sur $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ - Partie 2)

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Montrer que u est stationnaire si et seulement si elle vérifie à partir d'un certain rang $u_{n+1} = u_n$.
2. On suppose maintenant que u est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et qu'elle est convergente. En majorant $|u_{n+1} - u_n|$ à partir d'un certain rang, montrer que u est stationnaire.

Correction.

1. ($\Rightarrow$) Si u est stationnaire, il existe $a \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n = a$. En particulier, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} = a = u_n$.
($\Leftarrow$) S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} = u_n$. Alors en posant $a = u_N$, on a pour tout $n \geq N$, $u_n = a$. La suite est donc stationnaire.
2. Formalisons cet énoncé et faisons parler les hypothèses. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Z}$ d'où aussi $u_{n+1} - u_n \in \mathbb{Z}$ donc soit $|u_{n+1} - u_n| = 0$ soit $|u_{n+1} - u_n| \geq 1$. Autrement dit, si on trouve un majorant dans $[0, 1[$, alors u est stationnaire. Puisque u est convergente, il existe $\ell \in \mathbb{R}$ telle que u tend vers ℓ . On a donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Pour relier les quantités $|u_{n+1} - u_n|$ et $|u_n - \ell|$, on utilise l'inégalité triangulaire.

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de u . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_{n+1} - u_n| = |u_{n+1} - \ell + \ell - u_n| \leq |u_{n+1} - \ell| + |\ell - u_n|.$$

Posons alors $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Puisque u converge vers ℓ , il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1} - \ell| + |\ell - u_n| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Ainsi pour tout $n \geq N$, puisque $|u_{n+1} - u_n| < 1$ et $|u_{n+1} - u_n| \in \mathbb{N}$, on obtient $u_{n+1} = u_n$. La suite est donc stationnaire (d'après la question précédente).

Exercice 13 (Inversion de quantificateurs)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 0. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists p > n, |u_p| < \varepsilon.$$

Que signifie cette propriété ? Donner sa négation.

Correction.

Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On cherche à construire $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > n$ et $|u_p| < \varepsilon$.

On traduit l'hypothèse en prenant soin de ne pas réutiliser la variable n maintenant fixée dans notre raisonnement : Puisque u tend vers 0, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N_\varepsilon$, $|u_k| < \varepsilon$.

Si $N_\varepsilon > n$, $p = N_\varepsilon$ convient car alors $p > n$ et $p \geq N_\varepsilon$ donc $|u_p| < \varepsilon$.

Si $N_\varepsilon \leq n$, $p = n + 1$ convient car alors $p > n$ et $p \geq N_\varepsilon$ donc $|u_p| < \varepsilon$.

Autrement dit, $p = \max(N_\varepsilon, n + 1)$ convient.

Cette propriété signifie que l'on peut trouver des éléments de la suite aussi petit que l'on veut en valeur absolue, pour des indices aussi grands que l'on veut.

Sa négation est

$$\exists \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall p > n, |u_p| \geq \varepsilon.$$

Exercice 14

Soit u une suite réelle. On souhaite montrer que u n'est pas monotone si et seulement si

$$(2) \quad \exists n, p, q \in \mathbb{N}, n < p < q \text{ et } (u_p > \max(u_n, u_q) \text{ ou } u_p < \min(u_n, u_q))$$

1. Montrer le sens indirect.

2. ★ Montrer le sens direct.

Correction.

Reformulons : L'expression (1) de l'énoncé équivaut à

$$\exists n, p, q \in \mathbb{N}, n < p < q \text{ et } ((u_p > u_n \text{ et } u_p > u_q) \text{ ou } (u_n > u_p \text{ et } u_q > u_p))$$

Soit encore

$$\exists n, p, q \in \mathbb{N}, n < p < q \text{ et } ((u_n < u_p \text{ et } u_p > u_q) \text{ ou } (u_n > u_p \text{ et } u_p < u_q)).$$

Les trois indices caractérisent le fait que soit u croît puis décroît, soit u décroît puis croît (au sens strict) :

k	n	p	q
u_k	u_n	u_p	u_q

ou bien

k	n	p	q
u_k	u_n	u_p	u_q

On reformule la prémisse (en deux temps) : u est monotone si elle est croissante ou décroissante *i.e.*

$$(\forall n, p \in \mathbb{N}, n \leq p \Rightarrow u_n \leq u_p) \text{ ou } (\forall n, p \in \mathbb{N}, n \leq p \Rightarrow u_p \leq u_n)$$

Par négation, u n'est pas monotone si et seulement si

$$(\exists n, p \in \mathbb{N}, n > p \text{ et } u_n > u_p) \text{ et } (\exists n, p \in \mathbb{N}, n > p \text{ et } u_p > u_n).$$

Les variables sont muettes et on pourrait les laisser indifférenciées mais pour clarifier les raisonnements, on peut encore écrire (avec un abus de notation) que u n'est pas monotone si et seulement si

$$\exists n_1 < n_2 \in \mathbb{N}, u_{n_1} < u_{n_2} \text{ et } \exists p_1 < p_2 \in \mathbb{N}, u_{p_1} > u_{p_2}.$$

Montrons l'équivalence par double implication.

($\Leftarrow$) On distingue les 2 cas. 1er cas : supposons que

$$\exists n, p, q \in \mathbb{N}, n < p < q, u_n < u_p \text{ et } u_p > u_q$$

Alors en posant $n_1 = n$, $n_2 = p$, $p_1 = p$, $p_2 = q$, on a bien

$$n_1 < n_2, u_{n_1} < u_{n_2}, p_1 < p_2 \text{ et } u_{p_1} > u_{p_2}.$$

Donc u n'est pas monotone. 2ème cas : supposons que

$$\exists n, p, q \in \mathbb{N}, n < p < q, u_n > u_p \text{ et } u_p < u_q$$

Alors en posant $n_1 = p$, $n_2 = q$, $p_1 = n$, $p_2 = p$, on a bien

$$n_1 < n_2, u_{n_1} < u_{n_2}, p_1 < p_2 \text{ et } u_{p_1} > u_{p_2}.$$

Donc u n'est pas monotone.

($\Rightarrow$) Supposons que u n'est pas monotone *i.e.*

$$\exists n_1 < n_2 \in \mathbb{N}, u_{n_1} < u_{n_2} \text{ et } \exists p_1 < p_2 \in \mathbb{N}, u_{p_1} > u_{p_2}.$$

On construit $n < p < q$ en distinguant à nouveau les cas (il est très fortement conseillé de raisonner sur des dessins).

- Si $n_1 < n_2 < p_1 < p_2$, alors on pose $n = n_1$, $q = p_2$ et $p = \begin{cases} n_2 & \text{si } u_{n_2} > u_{p_1} \\ p_1 & \text{sinon} \end{cases}$ de sorte que $u_n < u_p$ et $u_p > u_q$.

- Si $n_1 < n_2 < p_2$, on fait de même car l'ordre entre n_2 et p_1 n'a pas servi dans le cas précédent.
- Si $p_1 < n_1 < n_2 < p_2$ (c'est le cas le plus délicat!).

Si $u_{n_1} > u_{p_1}$, on conserve le triplet $p_1 < n_1 < p_2$ car alors $u_{p_1} < u_{n_1}$ et $u_{n_1} > u_{p_1} > u_{p_2}$.

Si $u_{n_1} = u_{p_1}$, on conserve le triplet $p_1 < n_2 < p_2$ car alors $u_{p_1} = u_{n_1} < u_{n_2}$ et $u_{n_2} > u_{n_1} = u_{p_1} > u_{p_2}$.

Si $u_{n_1} < u_{p_1}$, on conserve le triplet $p_1 < n_1 < n_2$ car alors $u_{p_1} < u_{n_1}$ et $u_{n_1} > u_{n_2}$.

Les trois cas $n_1 < p_1 < p_2 < n_2$, $p_1 < n_1 < p_2 < n_2$ et $p_1 < p_2 < n_1 < n_2$ sont symétriques des précédents, on les laisse en exercice.

Exercice 15

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 0.

1. Montrer que uv tend vers 0 en utilisant le théorème des gendarmes.
2. Montrer que uv tend vers 0 sans utiliser le théorème des gendarmes.

Correction.

1. Construisons deux suites encadrant uv et de limite nulle. Attention, le théorème des gendarmes s'applique sur des suites réelles ; mais si u est une suite complexe, $|u|$ est une suite réelle.

Méthode : une suite w tend vers 0 si et seulement si $|w|$ tend vers 0.

Remarque bonus : une suite w tend vers $\ell \in \mathbb{K}$ si et seulement si $w - \ell$ tend vers 0.

Comme u est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |u_n||v_n| \leq M|v_n|$ (car $|v_n| \geq 0$). Par opération sur les suites, $M|v|$ converge vers 0 car $|v|$ tend vers 0. Ainsi d'après le théorème des gendarmes, $|uv|$ tend vers 0 donc uv également. La suite minorante étant la suite nulle.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Comme u est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. Puisque la suite v tend vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|v_n| = |v_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$. Mais alors pour tout $n \geq N$, $|u_n v_n - 0| = |u_n||v_n| \leq M|v_n| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. Ainsi, nous venons de montrer que la suite $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 16 (Série harmonique)

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que la suite u est soit convergente, soit tend vers $+\infty$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_{2n} \geq \frac{1}{2} + u_n$.
3. En déduire que u tend vers $+\infty$.

Correction.

1. "Converger ou diverger vers $\pm\infty$ " est une propriété des suites monotones.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$. Donc u est (strictement) croissante. Donc d'après le cours, soit u converge, soit u tend vers $+\infty$.

2. On a pour tout $n \geq 1$

$$u_{2n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = (2n - n) \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

d'où $u_{2n} \geq \frac{1}{2} + u_n$.

3. Quand on bloque, on tente de raisonner par l'absurde. On pourrait prendre la négation en toute généralité de " u tend vers $+\infty$ ", mais on va être un peu plus rapide en utilisant la première question.

D'après la première question, soit u converge, soit u tend vers $+\infty$. Supposons par l'absurde que u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on a $\ell \geq \ell + \frac{1}{2}$. C'est impossible. Donc u tend vers $+\infty$.

Exercice 17 (Cours : complément du théorème de la limite monotone)

Soit u une suite réelle. Si u est décroissante et minorée, alors u est convergente vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell \leq u_n$.

1. Montrer ce résultat en utilisant le théorème de la limite monotone pour les suites croissantes.
2. Montrer ce résultat sans utiliser le théorème de la limite monotone. *Indication : on pourra poser $\ell = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$.*

Correction.

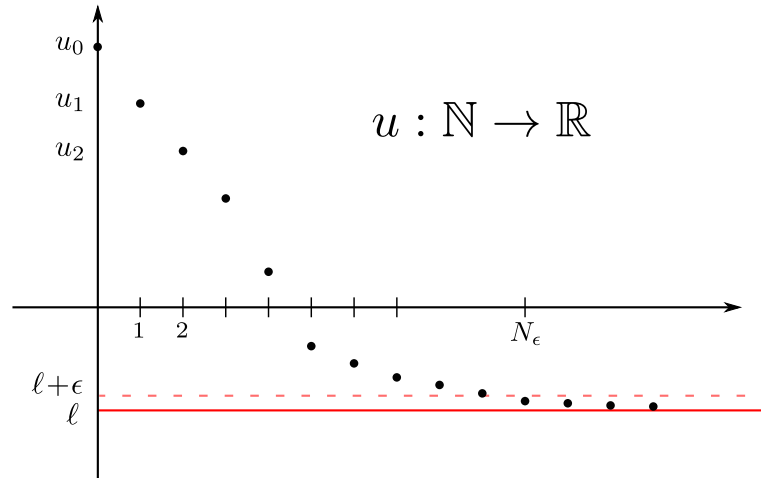


FIGURE 1. Exercice 17 : illustration d'une suite décroissante et minorée, où $\ell = \inf u(\mathbb{N})$.

1. D'après le théorème de la limite monotone, si v est croissante et majorée, alors v est convergente vers une limite $\ell_v \in \mathbb{R}$ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq \ell_v$.
En appliquant ce résultat à $v = -u$, il existe donc $\ell_v \in \mathbb{R}$ telle que $-u$ converge vers ℓ_v et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-u_n \leq -\ell_v$. Ainsi, u converge vers $\ell = -\ell_v$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \ell$.
2. Comme u est minorée, l'ensemble $u(\mathbb{N}) = \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ est une partie minorée non vide de $\mathbb{R}$. Ainsi, par la propriété de la borne inférieure, $u(\mathbb{N})$ admet une borne inférieure, que l'on note $\ell \in \mathbb{R}$. On a donc en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell \leq u_n$ puisque ℓ est un minorant de $u(\mathbb{N})$.

Montrons que u est convergente, de limite ℓ . Soit $\varepsilon > 0$, par la caractérisation de la borne inférieure, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que $\ell \leq u_{N_\varepsilon} < \ell + \varepsilon$. Mais alors, pour tout $n \geq N_\varepsilon$, comme u est décroissante, il vient $\ell \leq u_n \leq u_{N_\varepsilon} < \ell + \varepsilon$, c'est-à-dire $u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. La suite u est donc bien convergente, de limite ℓ .

Licence 2^{ème} année, Mathématiques et Applications
ANALYSE 3

Feuille de TD n°3

Suites réelles et complexes : comportement asymptotique.

Exercices complémentaires d'entraînement

Exercice 1

Soient $a, b, q, r \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $0 < q < r$. Montrer que

$$n^a = o_{n \rightarrow +\infty}(n^b) \quad \text{et} \quad q^n = o_{n \rightarrow +\infty}(r^n).$$

Correction.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n^a}{n^b} = n^{a-b}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, car $a - b < 0$, donc $n^a = o_{n \rightarrow +\infty}(n^b)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{q^n}{r^n} = \left(\frac{q}{r}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, car c'est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{q}{r} < 1$, donc $q^n = o_{n \rightarrow +\infty}(r^n)$.

Exercice 2

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n = (-1)^n + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$. Montrer que u est bornée.

Correction.

Posons $v = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Par hypothèse, il existe une suite $\varepsilon \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et telle que $u = v + \varepsilon$ (ou APCR). Ainsi, u est la somme de deux suites bornées donc elle est bornée. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|(-1)^n| \leq 1$ et la suite ε est convergente donc bornée.

Exercice 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. Montrer que

$$\frac{a}{b + o_{n \rightarrow +\infty}(1)} = \frac{a}{b} + o_{n \rightarrow +\infty}(1).$$

Correction.

D'après le cours, si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, on a

$$u_n = \ell + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} b + o_{n \rightarrow +\infty}(1) = b$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{b + o_{n \rightarrow +\infty}(1)} = \frac{a}{b} \quad \text{d'où} \quad \frac{a}{b + o_{n \rightarrow +\infty}(1)} = \frac{a}{b} + o_{n \rightarrow +\infty}(1).$$

Exercice 4

Donner un équivalent simple des quantités suivantes

1. $u_n = (n - 7) \ln(n^2 + 2)$

3. $u_n = -7^n + 5n^{-3n} - n^3 + (2n)!$

2. $u_n = \frac{n}{1 - \frac{1}{n}}$

4. $u_n = 2n^4 - 3n^2 + (\ln(n))^9 - n^3(\ln(n))^2 + 0.9^n.$

Correction.

- $n^2 + 2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2$ donc $\ln(n^2 + 2) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \ln(n)$ et $(n - 7) \ln(n^2 + 2) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n \ln(n)$.
- $\frac{n}{1 - \frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ car $1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ d'où le résultat par produit termes à termes.
- D'après le cours $7^n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n!)$ et $n^3 = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n!)$. Or, $n! = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}((2n)!)$ car $\frac{n!}{(2n)!} = \frac{1}{\prod_{k=n+1}^{2n} k} \leq \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Par transitivité, $7^n - n^3 = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}((2n)!)$. De plus, $n^{-3n} = e^{-3n \ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $n^{-3n} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1) = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}((2n)!)$. Les 3 premiers termes sont négligeables face à $(2n)!$ donc $u_n = (2n)! + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}((2n)!)$, i.e. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (2n)!$.
- On a $3n^2 = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^4)$ car $\frac{3n^2}{n^4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et d'après le cours $\ln n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^{\frac{1}{9}})$ donc par élévation à une puissance finie, $(\ln n)^9 = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n) = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^4)$, de même $(\ln n)^2 = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n)$ donc en multipliant par n^3 , $n^3(\ln n)^2 = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^4)$. Enfin, $0.9 < 1$ donc $0.9^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $0.9^n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1) = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^4)$. Ainsi, $u_n = 2n^4 + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^4)$, i.e. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n^4$.

Exercice 5

Donner des équivalents simples des quantités suivantes.

- $u_n = \frac{n-1}{3} \ln(n)^5 + (n + \sqrt{n+1} - 7)^2$
- $u_n = \cos\left(\frac{1}{n^n}\right) + \frac{1}{(n+3)^2}$
- $u_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$
- $u_n = (n-1)^n$
- $u_n = \frac{(n-\pi)^n}{n^n + 10^n - (3n)!}$
- $u_n = \frac{8 - 3n + \frac{1}{3^n} + \sqrt{n} \ln(n)^2}{-1 + \frac{n}{\ln(\ln(n^{2n}))}}$

Correction.

- $\frac{n-1}{3} \ln(n)^5 + (n + \sqrt{n+1} - 7)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2$. En effet, $n + \sqrt{n+1} - 7 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ d'où $(n + \sqrt{n+1} - 7)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2$ d'où $(n + \sqrt{n+1} - 7)^2 = n^2 + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^2)$. D'autre part, $\ln n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^{\frac{1}{5}})$ donc par élévation à une puissance finie $\ln(n)^5 = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n)$ donc $\frac{n-1}{3} \ln(n)^5 = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^2)$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \frac{n-1}{3} \ln(n)^5 = 0$. D'où le résultat en sommant.
- $\cos(\frac{1}{n^n}) + \frac{1}{(n+3)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(\frac{1}{n^n}) + \frac{1}{(n+3)^2} = \cos(0) + 0 = 1$ par continuité de la fonction cosinus.
- $u_n = e^{n \ln(1 + \frac{3}{n})}$. Or $\ln(1 + \frac{3}{n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(1 + \frac{3}{n}) = 3$. La fonction exponentielle étant continue en 3, on peut composer et on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^3$. Ainsi, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^3$.
- $(n-1)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n-1)^n$. On a $\frac{(n-1)^n}{n^n} = (1 - \frac{1}{n})^n = e^{n \ln(1 - \frac{1}{n})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}$ donc $(n-1)^n$ n'est pas équivalent à n^n .
- $\frac{(n-\pi)^n}{n^n + 10^n - (3n)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(n-\pi)^n}{n^n}$ car $10^n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^n)$ et $(3n)! = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^n)$ donc $n^n + 10^n - (3n)! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n$. De plus, $\frac{(n-\pi)^n}{n^n} = (1 - \frac{\pi}{n})^n = e^{n \ln(1 - \frac{\pi}{n})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\pi}$. Ainsi, $\frac{(n-\pi)^n}{n^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\pi}$ et on en déduit par transitivité que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\pi}$.
- Au numérateur, $v_n \doteq 8 - 3n + \frac{1}{3^n} + \sqrt{n} \ln(n)^2 = -3n + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n)$ donc $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -3n$. En effet, $\frac{1}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $8 + \frac{1}{3^n} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n)$ et $\ln(n) = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^{\frac{1}{4}})$ donc par élévation à une puissance finie, $(\ln n)^2 = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(\sqrt{n})$ et en multipliant par $\sqrt{n}$, $\sqrt{n} \ln(n)^2 = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n)$.

Pour $n > 2$, notons w_n le dénominateur. On a

$$\begin{aligned} w_n &= -1 + \frac{n}{\ln(\ln(n^{2n}))} = -1 + \frac{n}{\ln(2n \ln(n))} = -1 + \frac{n}{\ln(2) + \ln(n) + \ln(\ln(n))} \\ &= -1 + \frac{n}{\ln(n) + \frac{o}{n \rightarrow +\infty}(\ln(n))} = -1 + \frac{n}{\ln(n)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{o}{n \rightarrow +\infty}(1)} \\ &= -1 + \frac{n}{\ln(n)} (1 + \frac{o}{n \rightarrow +\infty}(1)) = -1 + \frac{n}{\ln(n)} + \frac{o}{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{\ln(n)} \right) \\ &= \frac{n}{\ln(n)} + \frac{o}{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{\ln(n)} \right) \end{aligned}$$

En effet, $\frac{1}{1 + \frac{o}{n \rightarrow +\infty}(1)} = 1 + \frac{o}{n \rightarrow +\infty}(1)$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{o}{n \rightarrow +\infty}(1)} = 1$ et $-1 = \frac{o}{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{\ln(n)} \right)$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln(n)} = +\infty$. Ainsi, $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}$ et par opérations sur les équivalents, $u_n = \frac{v_n}{w_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -3 \ln n$.

Exercice 6

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que

$$u_n = \frac{o}{n \rightarrow +\infty}(v_n) \iff au_n = \frac{o}{n \rightarrow +\infty}(v_n).$$

Correction.

($\Rightarrow$) Puisque $u_n = \frac{o}{n \rightarrow +\infty}(v_n)$, il existe $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou APCR), $u_n = \varepsilon_n v_n$ donc $au_n = a\varepsilon_n v_n$. Or la suite $(a\varepsilon_n)_n$ tend vers 0. Ceci montre que $au_n = \frac{o}{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

($\Leftarrow$) Puisque $au_n = \frac{o}{n \rightarrow +\infty}(v_n)$, il existe $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou APCR), $au_n = \varepsilon_n v_n$ donc $u_n = \frac{1}{a} \varepsilon_n v_n$ car $a \neq 0$. Or la suite $(\frac{1}{a} \varepsilon_n)_n$ tend vers 0. Ceci montre que $u_n = \frac{o}{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

Exemple d'application : $\ln n = \frac{o}{n \rightarrow +\infty}(n)$ donc $\ln(n^2) = 2 \ln n = \frac{o}{n \rightarrow +\infty}(n)$.

Exercice 7

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u_n = \frac{o}{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

1. Montrer que $(-1)^n u_n = \frac{o}{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.
2. Montrer que $u_n = \frac{o}{n \rightarrow +\infty}(|v_n|)$.

Correction.

Par définition, il existe $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou APCR), $u_n = \varepsilon_n v_n$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou APCR), $u_n = \varepsilon_n v_n$ donc $(-1)^n u_n = (-1)^n \varepsilon_n v_n$. Or la suite $((-1)^n \varepsilon_n)_n$ tend vers 0 car sa valeur absolue tend vers 0. Ceci montre que $(-1)^n u_n = \frac{o}{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a nécessairement $|v_n| = v_n$ ou $|v_n| = -v_n$; posons $s_n = 1$ si $v_n \geq 0$ et $s_n = -1$ si $v_n < 0$ alors $|v_n| = s_n v_n$ d'où $u_n = \varepsilon_n s_n |v_n|$ (ou APCR). De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |s_n \varepsilon_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ donc la suite $(s_n \varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. Ceci montre que $u_n = \frac{o}{n \rightarrow +\infty}(|v_n|)$.

Exercice 8

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites non nulles et équivalentes. On modifie la suite v en fixant à 0 un nombre fini de ses termes et on note w la suite obtenue. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$.

Correction.

Puisque $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et une suite $(\delta_n)_{n \geq N}$ tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 1$ et pour tout $n \geq N$, $u_n = \delta_n v_n$.

Considérons l'ensemble des indices pour lesquels la suite w s'annule : $A = \{n / n \in \mathbb{N}, w_n = 0\} = \{n / n \in \mathbb{N}, w_n \neq v_n\}$. Cet ensemble étant fini, il admet un maximum. Notons $N_0 = \max(A) + 1$. Alors pour tout $n \geq N_0$, $w_n = v_n$. Notons enfin $N_1 = \max(N, N_0)$, alors pour tout $n \geq N_1$, $u_n = \delta_n v_n = \delta_n w_n$. Ainsi, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$.

Licence 2^{ème} année, Mathématiques et Applications
ANALYSE 3

Feuille de TD n°4

Suites réelles et complexes : suites extraites, suites de Cauchy. Rappels et compléments sur les séries.

Exercices complémentaires d'entraînement

Exercices de prise en main.

Exercice 1

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \left(-\frac{n+2}{n}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donner deux valeurs d'adhérence de u .

Correction.

Par définition : ℓ est une valeur d'adhérence de u s'il existe une sous-suite de u qui converge vers ℓ . On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n \left(\frac{n+2}{n}\right)^n = (-1)^n e^{n \ln(1 + \frac{2}{n})}$. Or $n \ln(1 + \frac{2}{n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \frac{2}{n} = 2$ donc $n \ln(1 + \frac{2}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.

L'exponentielle étant continue, $e^{n \ln(1 + \frac{2}{n})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^2$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$ de sorte que $u_n = (-1)^n v_n$ et en particulier, $u_{2n} = v_{2n}$ et $u_{2n+1} = -v_{2n+1}$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n} = e^2$ car v tend vers e^2 et $(v_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de v . De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n+1} = e^2$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = e^2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = -e^2$ d'où e^2 et $-e^2$ sont deux valeurs d'adhérence de u .

Exercice 2

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_n = i \arctan^2(-\ln(n^5 + 7))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que u possède au moins une valeur d'adhérence.

Correction.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\arctan(x)| \leq \frac{\pi}{2}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq (\frac{\pi}{2})^2$. La suite est bornée donc elle admet une valeur d'adhérence par le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 3

Soit φ une extractrice. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

Correction.

Par définition : une extractrice est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante.

■ Méthode : pour montrer une propriété pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut raisonner par récurrence.

Montrons la propriété pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : comme $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, on a $\varphi(0) \geq 0$.

Hérédité : supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$. Comme φ est strictement croissante, on a $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$. Donc $\varphi(n+1) \geq n+1$. Ceci termine la récurrence.

Exercice 4

1. Montrer que u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$, diverge.

2. Montrer que u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{n \sin(3n+5)}{4n+1}$, admet une sous-suite convergente.

Correction.

1. La suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs. On raisonne selon la valeur de n modulo 3 (division euclidienne de n par 3). Posons $\varphi_0 : n \in \mathbb{N} \mapsto 3n$, $\varphi_1 : n \in \mathbb{N} \mapsto 3n+1$ et $\varphi_2 : n \in \mathbb{N} \mapsto 3n+2$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi_0(n)} = 0$, $u_{\varphi_1(n)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $u_{\varphi_2(n)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ces sous-suites sont constantes donc convergentes. La suite diverge car elle admet plusieurs valeurs d'adhérences.

2. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sin(3n+5)}{4}$ donc $u_n = \frac{\sin(3n+5)}{4} + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geq N}$ une suite qui tend vers 0 tels que pour tout $n \geq N$, $u_n = \frac{\sin(3n+5)}{4} + \varepsilon_n$ d'où $|u_n| \leq \frac{1}{4} + |\varepsilon_n|$. Puisque ε est convergente, elle est bornée. Il existe donc $M > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq \frac{1}{4} + M$. Alors u est bornée APCR donc bornée (par $\max(\frac{1}{4} + M, \max\{|u_n|/n < N\})$). Ainsi, elle admet une sous-suite convergente d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 5

On rappelle que la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet l'intervalle $[-1, 1]$ comme ensemble de valeurs d'adhérence. Soit u la suite définie par $u_n = |\cos(n)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de u .

Correction.

Par définition : ℓ est une valeur d'adhérence de u s'il existe une sous-suite de u qui converge vers ℓ .

On explicite l'énoncé en introduisant des variables pour faire parler entre elles les hypothèses :

Notons $v = (\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ et soit $\ell \in [-1, 1]$. Il existe alors une extractrice φ telle que v_φ converge vers ℓ , i.e. $\cos(\varphi(n)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$. Alors, $u_{\varphi(n)} = |\cos(\varphi(n))| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} |\ell|$ par continuité de la fonction valeur absolue.

On vient donc de montrer que pour tout $\ell \in [-1, 1]$, $|\ell|$ est une valeur d'adhérence de u . Autrement dit, en notant V l'ensemble des valeurs d'adhérence de u , on a montré que $[0, 1] \subset V$.

Montrons que $V = [0, 1]$. Il reste donc à montrer l'inclusion inverse. Soit $\ell' \in V$ une valeur d'adhérence de u , il existe ψ une extractrice telle que u_ψ converge vers ℓ' , i.e. $|\cos(\psi(n))| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell'$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |\cos(\psi(n))| \leq 1$ donc nécessairement $\ell' \in [0, 1]$ par passage à la limite.

Exercice 6

Soit $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n^3 = 1$.

1. Montrer que z admet une valeur d'adhérence.
2. On note $V \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de z . Déterminer toutes les valeurs pouvant appartenir à V .
3. On suppose que pour tout $\ell \in V$, $\Im(\ell) > 0$. Montrer que z converge.

Correction.

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n|^3 = 1$ donc $|z_n| \leq 1$. La suite est majorée donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une valeur d'adhérence.

2. Par définition : ℓ est une valeur d'adhérence de z s'il existe une sous-suite de z qui converge vers ℓ .

Soit $\ell \in V$ (ℓ existe car $V \neq \emptyset$). Il existe une extractrice φ telle que la sous-suite z_φ converge vers ℓ . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{\varphi(n)}^3 = 1$. Par continuité de l'élevation au cube, on a en passant à la limite, $\ell^3 = 1$ donc $\ell \in \{1, j, j^2\}$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Pour rappel, ce sont les racines cubiques de l'unité. Dans le plan complexe, elles forment un triangle équilatéral de sommets $1, j$ et $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \bar{j}$.

Ainsi $V \subset \{1, j, j^2\}$. De plus, toute suite constante de valeur dans $\{1, j, j^2\}$ satisfait les hypothèses sur z . Chacune de ces trois valeurs peut donc être une valeur d'adhérence potentielle de z .

3. Si $\Im(\ell) > 0$, alors par élimination, $\ell = j$ ($\Im(j) = \sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\Im(j^2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$).

La suite est bornée et a une unique valeur d'adhérence, donc d'après le cours, elle converge.

Attention, l'unicité de la valeur d'adhérence n'est pas suffisante. La suite $(n(1 + (-1)^n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet que 0 pour valeur d'adhérence mais n'est pas convergente.

En bonus, donnons quelques exemples de suites z satisfaisant l'énoncé initial :

- pour tout $\ell \in V$, la suite constante égale à ℓ ... (ne pas oublier les exemples les plus simples)
- la suite définie par $z_n = e^{\frac{2in\pi}{3}} = j^n$. On a $z_0 = 1, z_1 = j, z_2 = j^2, z_3 = j^3 = 1, \dots$. Les termes de z tournent dans le sens trigonométriques sur les sommets du triangle équilatéral défini par $(1, j, j^2)$.
- la suite définie par $z_0 = j$ et la relation de récurrence $z_{n+1} = \bar{z}_n$. On a $z_{n+2} = \overline{\bar{z}_n} = z_n$ donc z prend deux valeurs associées aux sous-suites constantes données par $z_{2n} = j$ et $z_{2n} = \bar{j} = j^2$ (z oscille entre les deux sommets non réels du triangle équilatéral).

Révisions et approfondissement.

Exercice 7

Soient $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ deux suites telles que v est une sous-suite de u . On suppose que v admet k valeurs d'adhérence avec $k \in \mathbb{N}$. Montrer que u admet au moins k valeurs d'adhérence.

Correction.

On explicite l'énoncé :

Puisque v est une sous-suite de u , il existe φ une extractrice telle que $v = u_\varphi$. De plus, $\ell \in \mathbb{K}$ est une valeur d'adhérence de v s'il existe ψ une extractrice telle que v_ψ tend vers ℓ , i.e. $v_{\psi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

On combine ces assertions : Le cas échéant, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{\psi(n)} = u_{\varphi(\psi(n))}$ et donc $u_{\varphi \circ \psi}$ tend vers ℓ . Or $u_{\varphi \circ \psi}$ est une sous-suite de u donc ℓ est une valeur d'adhérence de u .

Finalement, on a montré que pour tout $\ell \in \mathbb{K}$, si ℓ est valeur d'adhérence de v alors ℓ est valeur d'adhérence de u . Donc u a au moins autant de valeurs propres que v .

u peut avoir plus de valeurs d'adhérence que v : par exemple, si u a $N > 1$ valeurs d'adhérence et v est convergente, alors v n'a qu'une valeur d'adhérence. Considérer par exemple $u = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = u_{2n}$.

Exercice 8

Soit u une suite réelle.

1. On suppose que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ' . Montrer que ℓ et ℓ' sont les deux seules valeurs d'adhérence de u .
2. En déduire les valeurs d'adhérence de la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n(1 + e^{-n})$.

Correction.

Le résultat de la question 1. généralise celui vu dans la feuille de TD concernant le fait que la suite $(\arctan((-1)^n n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet $\pm \frac{\pi}{2}$ comme uniques valeurs d'adhérences. La forme de la preuve présentée ici diffère de celle vue dans la feuille de TD. Vous pouvez vous entraîner à reproduire la même rédaction.

1. Par l'absurde supposons qu'il existe $\ell'' \in \mathbb{R}$ une valeur d'adhérence de u distincte de ℓ, ℓ' .

Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$]\ell'' - \varepsilon_0, \ell'' + \varepsilon_0[\cap]\ell - \varepsilon_0, \ell + \varepsilon_0[= \emptyset \quad \text{et} \quad]\ell'' - \varepsilon_0, \ell'' + \varepsilon_0[\cap]\ell' - \varepsilon_0, \ell' + \varepsilon_0[= \emptyset.$$

Par convergence de $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ vers ℓ , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_{2n} \in]\ell - \varepsilon_0, \ell + \varepsilon_0[$. Par convergence de $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ vers ℓ' , il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $u_{2n+1} \in]\ell' - \varepsilon_0, \ell' + \varepsilon_0[$.

Comme ℓ'' est une valeur d'adhérence de u , il existe $k \geq \max(2n_0, 2n_1 + 1)$ tel que $u_k \in]\ell'' - \varepsilon_0, \ell'' + \varepsilon_0[$. Supposons que k soit pair, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2n$ et donc $k = 2n \geq 2n_0$ i.e. $n \geq n_0$. Par conséquent $u_k = u_{2n} \in]\ell - \varepsilon_0, \ell + \varepsilon_0[$. On a donc $u_k \in]\ell'' - \varepsilon_0, \ell'' + \varepsilon_0[\cap]\ell - \varepsilon_0, \ell + \varepsilon_0[= \emptyset$. C'est absurde.

Sinon k est impair, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2n + 1$ et donc $k = 2n + 1 \geq 2n_1 + 1$ i.e. $n \geq n_1$. Par conséquent $u_k = u_{2n+1} \in]\ell' - \varepsilon_0, \ell' + \varepsilon_0[$. On a donc $u_k \in]\ell'' - \varepsilon_0, \ell'' + \varepsilon_0[\cap]\ell' - \varepsilon_0, \ell' + \varepsilon_0[= \emptyset$. C'est de nouveau absurde.

On a obtenu une contradiction dans tous les cas, ainsi u n'admet pas d'autres valeurs d'adhérences que ℓ et ℓ' .

Ce résultat est directement généralisable à toute famille finie de sous-suite $(u_{\varphi_k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, pourvu que les ensembles $\varphi_k(\mathbb{N})$ forment une partition de $\mathbb{N}$.

Rappel / complément de théorie des ensembles. Soit E un ensemble et $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous ensembles de E indexée par l'ensemble I . On dira que la famille $(E_i)_{i \in I}$ forme une partition de E et on notera cela symboliquement¹

$$E = \bigsqcup_{i \in I} E_i,$$

si

- la réunion des ensembles E_i , $i \in I$, vaut E , c'est-à-dire $E = \bigcup_{i \in I} E_i$,
- les ensembles E_i , $i \in I$, sont deux à deux disjoints, c'est-à-dire pour tout $i, j \in I$, $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$.

Par exemple pour $E = \mathbb{N}$, $I = \{0, 1\}$, $E_0 = \{2n / n \in \mathbb{N}\}$ et $E_1 = \{2n + 1 / n \in \mathbb{N}\}$, on a bien que la famille (E_0, E_1) forme une partition de E puisque on peut séparer l'ensemble des entiers naturels en deux sous ensembles disjoints : les entiers pairs et impairs.

Exercice : formuler avec un énoncé précis la généralisation suggérée juste après la fin de la démonstration de cette question 1. Le démontrer en adaptant la preuve présentée dans ce corrigé.

Quelques commentaires sur cette définition.² On a par définition pour tout $i \in I$, E_i est un sous ensemble de E , donc $E_i \subset E$. On dit aussi que E_i est une partie de E et on note cela $E_i \in \mathcal{P}(E)$. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble qui contient toutes les parties de E , c'est-à-dire tous les sous ensembles de E . Ainsi E_i en tant que sous ensemble de E (donc usage de la notation $\subset$ pour écrire $E_i \subset E$) peut être aussi vu comme un *élément* de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ (donc usage du symbole $\in$ pour écrire $E_i \in \mathcal{P}(E)$).

1. l'usage du symbole $\bigsqcup$ à la place de $\bigcup$ permet de signifier que l'union est *disjointe*.

2. qui vous seront particulièrement utiles l'année prochaine si vous suivez le cours de *théorie de la mesure et intégration*.

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 1 + e^{-2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $u_{2n+1} = -(1 + e^{-2n-1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$. Donc d'après la question 1., 1 et -1 sont les valeurs d'adhérence de u .

Exercice 9

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer qu'elle admet une sous-suite de termes soit tous positifs, soit tous négatifs.

Correction.

On a $\mathbb{N} = I_- \cup I_+$, avec $I_- = \{n \in \mathbb{N} / u_n \leq 0\}$ et $I_+ = \{n \in \mathbb{N} / u_n \geq 0\}$, puisque

- par définition $I_- \subset \mathbb{N}$ et $I_+ \subset \mathbb{N}$ donc $I_- \cup I_+ \subset \mathbb{N}$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a soit $u_n \leq 0$ et donc $n \in I_- \subset I_- \cup I_+$, soit $u_n \geq 0$ et donc $n \in I_+ \subset I_- \cup I_+$.
D'où $\mathbb{N} \subset I_- \cup I_+$.

Comme $\mathbb{N}$ est infini, l'un (au moins) des ensembles I_- ou I_+ est également infini. Supposons que I_- est infini. Alors on sait qu'il existe φ une extractrice telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \in I_-$, i.e. $u_{\varphi(n)} \leq 0$. On a donc bien construit une sous suite de u à valeurs négatives. Si c'est I_+ qui est infini, alors par le même raisonnement, on construit une sous suite cette fois à valeurs positives. On a donc bien démontré dans tous les cas le résultat souhaité.

Exercice 10

Soient $c \in \mathbb{R}^*$ et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = c$.

1. Montrer à l'aide des résultats du cours que u n'est pas de Cauchy.
2. Montrer en revenant aux définitions que u n'est pas de Cauchy.

Correction.

1. Toute suite réelle de Cauchy converge. Or si u converge, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$ ce qui contredit $c \neq 0$.
2. Par définition, u est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N_\varepsilon, |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{n+1} - u_n| = |c|$, on a pour $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$ l'existence de $N_c \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_c, |u_{n+1} - u_n| > \frac{|c|}{2}.$$

Ainsi pour tout $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, il existe $p, q \geq N_\varepsilon$ tel que $|u_p - u_q| \geq \varepsilon$. En effet, on peut considérer $p = \max(N_\varepsilon, N_c)$ et $q = p + 1$. Ceci montre que u n'est pas de Cauchy.

Exercice 11

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On suppose que les sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers des scalaires a , b et c .

1. Montrer que $a = b = c$.
2. En déduire que u converge.

Correction.

1. Rassemblons les outils du cours pour montrer des égalités entre limites :

- définition de la limite,
- unicité de la limite,
- toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la limite de cette suite,
- opération sur les limites (mais aucune relation d'addition ou de multiplication ici),
- théorème des gendarmes et suites adjacentes (mais aucune information d'inégalités ici).

Pour exploiter le 3e item, nous allons construire des sous-suites communes à deux des suites de l'énoncé.

Les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ n'ont aucun terme en commun et pourraient converger vers des limites distinctes : c'est le cas pour $u = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$. En revanche, les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ ont en commun les termes de u d'indice multiple de 6. Et les suites $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ ont en commun les termes de u d'indice impair et multiple de 3 (3, 9, 15, ...).

Posons $v = (u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $w = (u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $t = (u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$.

La suite $(u_{6n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de v et une sous-suite de t . En effet, considérons les extractrices $\varphi : n \mapsto 2n$ et $\psi : n \mapsto 3n$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{\psi(n)} = u_{2\psi(n)} = u_{6n} \quad \text{et} \quad t_{\varphi(n)} = u_{3\varphi(n)} = u_{6n}$$

donc $(u_{6n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de v et une sous-suite de t . Or toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la limite de cette suite. Ainsi, $(u_{6n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a et c . Par unicité de la limite, $a = c$.

Construisons maintenant une sous-suite commune à w et t .

w_n	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	$\dots$
u_{2n+1}	u_1	u_3	u_5	u_7	u_9	u_{11}	u_{13}	u_{15}	$\dots$
u_{3n}	u_0	u_3	u_6	u_9	u_{12}	u_{15}	u_{18}	u_{21}	$\dots$
t_n	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	$\dots$

Pour extraire la sous-suite de termes communs à $t = (u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$, il faut prendre un terme sur 2 en commençant par le 2e, à savoir les indices impairs de t .

Pour $w = (u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, il faut prendre un terme sur 3 en commençant par le 2e, à savoir les termes w_{3n+1} .

Considérons maintenant les extractrices $\varphi : n \mapsto 2n + 1$ et $\psi : n \mapsto 3n + 1$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$t_{\varphi(n)} = u_{3\varphi(n)} = u_{3(2n+1)} = u_{6n+3} \quad \text{et} \quad w_{\psi(n)} = u_{2\psi(n)+1} = u_{2(3n+1)+1} = u_{6n+3}$$

donc $(u_{6n+3})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de v et une sous-suite de w . Ainsi, $b = c$.

2. Notons $\ell = a = b$. Les images des suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ contiennent tous les termes de u . Donc on va pouvoir encadrer ces termes à partir d'un certain rang dans un intervalle centré sur ℓ .

Soit $\varepsilon > 0$, puisque $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers ℓ , on a

$$\exists N_\varepsilon^v \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon^v, |u_{2n} - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \exists N_\varepsilon^w \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon^w, |u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$$

En posant $N = \max(N_\varepsilon^v, N_\varepsilon^w)$, on a alors

$$\forall n \geq N, |u_{2n} - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$$

Autrement dit, pour tout $k \geq 2N$, $|u_k - \ell| < \varepsilon$. Ainsi, u converge vers ℓ .

À partir du rang $2N$, les termes de u sont tous dans l'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

Licence 2^{ème} année, Mathématiques et Applications
ANALYSE 3

Feuille de TD n°5

Fonctions : limites et continuité.

Exercices complémentaires d'entraînement

Exercices de prise en main.

Exercice 1 (Un peu de topologie)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + 2\varepsilon[$ est un voisinage de x_0 .
2. Soit $V \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, satisfaisant $x_0 \in]a, b[$ et $]a, b[\subset V$. Montrer que V est un voisinage de x_0 .
3. Soit $V \subset \mathbb{R}$ un voisinage de x_0 . Soit $V' \subset \mathbb{R}$ tel que $V \subset V'$. Montrer que V' est un voisinage de x_0 .

Correction.

Rappel. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de x_0 s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset V$. Autrement dit, V est un voisinage de x_0 si V contient un intervalle ouvert centré en x_0 .

1. Posons $V =]x_0 - \varepsilon, x_0 + 2\varepsilon[$, on a $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset V$, donc V est bien un voisinage de x_0 (puisque V contient un intervalle ouvert centré en x_0).
2. On a $a < x < b$, donc par le lemme de réécriture, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a < x - \varepsilon < x < x + \varepsilon < b$ i.e. $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset]a, b[$. Or $]a, b[\subset V$, donc $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset V$. Par conséquent V est bien un voisinage de x_0 .
3. Comme V est un voisinage de x_0 , il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset V$. Comme $V \subset V'$, on a aussi $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset V'$. D'où V' est un voisinage de x_0 .

Exercice 2

Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{x}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Correction.

Rappel : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues. De plus $\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, donc par stabilité par multiplication d'un équivalent, on a $\frac{\text{sh}(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$, i.e. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Ainsi f admet une limite en $0 \in \overline{D_f}$, donc la fonction

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},$$

est continue en 0, donc sur tout $\mathbb{R}$ et prolonge f en 0.

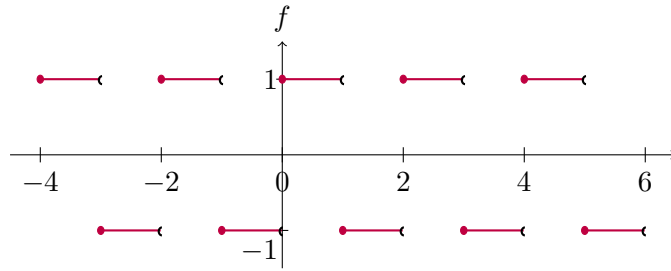
Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (-1)^{E(x)}$.

1. Tracer l'allure du graphe de f et déterminer l'ensemble des points $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que f est localement bornée en x_0 .
2. Soit $g :]-1, 0[\cup]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)$. Déterminer le prolongement par continuité maximal de g .

Correction.

1. f est bien définie car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(x) \in \mathbb{Z}$ donc $(-1)^{E(x)}$ est défini ($(-1)^{-1} = 1/(-1) = -1$).



Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ si $E(x)$ est pair et $f(x) = -1$ si $E(x)$ est impair. f est donc constante par morceaux et vaut 1 sur les intervalles de la forme $[2k, 2k+1[$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et -1 sur les intervalles de la forme $[2k+1, 2k+2[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = 1$ donc f est bornée donc localement bornée. En effet, soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et V un voisinage de x_0 , alors pour tout $x \in V$, $x \in \mathbb{R}$ donc $|f(x)| \leq 1$.

2. La fonction g est constante par morceaux et on a $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x) = -1$ et

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$. Ainsi, g est prolongeable en -1 et en 1 mais pas en 0 puisque les limites à gauche et à droite sont distinctes. Le prolongement maximal de g est donc la fonction

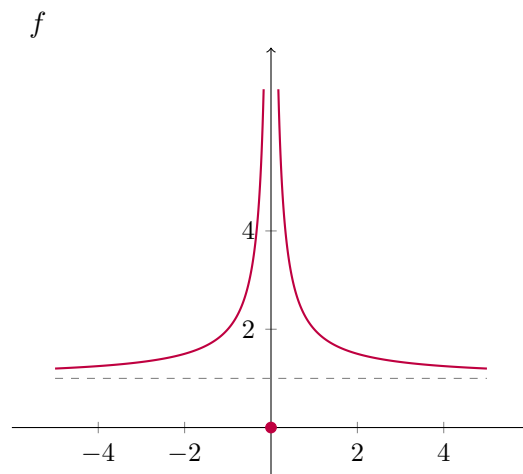
$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 1 & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases}.$$

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ si $x < 0$. Tracer l'allure du graphe de f et déterminer l'ensemble des points $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que f est localement bornée en x_0 .

Correction.

Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = 1 + \frac{1}{|x|}$ (la fonction est impaire). Le graphe de f s'obtient en traçant celui de $x \mapsto \frac{1}{|x|}$ et en le translatant verticalement de $+1$. Graphe auquel on ajoute le point $(0, f(0)) = (0, 0)$.



Par définition, f est localement bornée en x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 et $M > 0$ tels que pour tout $x \in V$, $|f(x)| \leq M$.

Pour tout $x_0 \neq 0$, f est localement bornée en x_0 car continue en x_0 . Montrons le néanmoins directement. En effet, si $x_0 > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\eta < x_0$ alors pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $|f(x)| \leq 1 + \frac{1}{|x|} \leq 1 + \frac{1}{|x_0 - \eta|}$ (car f est décroissante sur $V =]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$). Autrement dit, sur le voisinage V de x_0 , f est bornée par $M = 1 + \frac{1}{|x_0 - \eta|}$. On raisonne de même si $x_0 < 0$ en considérant $\eta > 0$ tel que $\eta < -x_0$ et un majorant $M = 1 + \frac{1}{|x_0 + \eta|}$.

Montrons maintenant que f n'est pas localement bornée en 0 . Soient V un voisinage de 0 et $M > 0$, montrons qu'il existe $x \in V$ tel que $|f(x)| > M$. Puisque V est un voisinage de 0 , il existe $\eta > 0$ tel que $] -\eta, \eta[\subset V$ et pour tout $x \in]0, \frac{1}{M}[$, on a $f(x) > 1 + M > M$. On cherche donc x dans $] -\eta, \eta[\cap]0, \frac{1}{M}[$: posons $x = \min(\frac{\eta}{2}, \frac{1}{M})$. Ainsi, $x \in V$ et $|f(x)| > M$.

Exercice 5

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement bornées en 1 . Montrer que $f + g$ est localement bornée en 1 .

Correction.

Par hypothèse, il existe $M, M' > 0$ et il existe V et V' deux voisinages de 1 tels que f est bornée par M sur V et g est bornée par M' sur V' . Par définition d'un voisinage, il existe $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon' > 0$ tels que $]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[\subset V$ et $]1 - \varepsilon', 1 + \varepsilon'[\subset V'$. Posons $\varepsilon'' = \min(\varepsilon, \varepsilon')$ et $V'' =]1 - \varepsilon'', 1 + \varepsilon''[$. Alors $V'' \subset V \cap V'$ donc pour tout $x \in V''$, $x \in V$ d'où $|f(x)| \leq M$ et $x \in V'$ d'où $|g(x)| \leq M'$. Ainsi, pour tout $x \in V''$, $|f(x) + g(x)| \leq M + M'$. Autrement dit, $f + g$ est bornée par $M + M'$ sur V'' .

On a plus généralement montré que l'intersection de deux voisinages d'un point est encore un voisinage de ce point.

Exercice 6

Soient $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que f et g sont continues en $x_0 \in D_f \cap D_g$. Montrer que $f + g$ est continue en x_0 ,

1. en utilisant la définition de la continuité,
2. en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité.

Correction.

1. Notons que $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$; autrement dit, il existe $\eta_f > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \eta_f, x_0 + \eta_f[\cap D_f, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Puisque g est continue en x_0 , il existe $\eta_g > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \eta_g, x_0 + \eta_g[\cap D_g, |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

Posons $\eta = \min(\eta_f, \eta_g)$, alors pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_{f+g}$,

$$|f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < 2\varepsilon.$$

Ainsi, la limite en x_0 de $f + g$ est bien $f(x_0) + g(x_0)$.

2. D'après la caractérisation séquentielle de la continuité, $f + g$ est continue en x_0 si pour toute suite $u = (u_n)$ telle que u tend vers x_0 , la suite $(f(u_n) + g(u_n))$ tend vers $f(x_0) + g(x_0)$. Soit donc u une telle suite. Alors d'après cette caractérisation, puisque f est continue en x_0 , $(f(u_n))$ tend vers $f(x_0)$. De même, $(g(u_n))$ tend vers $g(x_0)$. Par opération sur les suites, on déduit que $(f(u_n) + g(u_n))$ tend vers $f(x_0) + g(x_0)$.

Exercice 7

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que

$$\forall x > a, f(x) = g(x).$$

Montrer par différentes méthodes que $f(a) = g(a)$.

Correction.

Montrons que $f(a) - g(a) = 0$. Les fonctions f et g étant continues en a , la fonction $h = f - g$ est continue en a .

Méthode 1 : Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f - g$ est continue en a , il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a - \eta, a + \eta[\cap [a, +\infty[, |f(x) - g(x) - f(a) + g(a)| < \varepsilon.$$

En particulier, pour $x = a + \frac{1}{2}\eta$, on a

- $x \in]a - \eta, a + \eta[\cap [a, +\infty[$, donc l'inégalité $|f(x) - g(x) - f(a) + g(a)| < \varepsilon$ est satisfaite,
- et $x > a$ donc $f(x) - g(x) = 0$,

d'où on obtient $|-f(a) + g(a)| < \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien montré que $f(a) = g(a)$.

Méthode 2 : Considérons la suite u définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = a + \frac{1}{n}$ et notons $v = h(u)$. Ainsi, u est une suite à valeurs dans $D_h = [a, +\infty[$ qui tend vers a donc par caractérisation séquentielle de la continuité, $h(u)$ tend vers $h(a)$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = f(u_n) - g(u_n) = 0$ donc v tend vers 0 et par unicité de la limite $h(a) = 0$.

Méthode 3 : Supposons par l'absurde que $f(a) < g(a)$. Posons $\varepsilon = \frac{g(a) - f(a)}{2} > 0$. Puisque f est continue en a , on a

$$\exists \eta > 0, \forall x \in]a - \eta, a + \eta[\cap [a, +\infty[, |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Puisque g est continue en a , on a

$$\exists \eta' > 0, \forall x \in]a - \eta', a + \eta'[\cap [a, +\infty[, |g(x) - g(a)| < \varepsilon.$$

Posons $\eta'' = \min(\eta, \eta') > 0$. Alors pour $x = a + \frac{1}{2}\eta''$, on a

- $f(x) < f(a) + \varepsilon = \frac{f(a)+g(a)}{2}$ car $x \in]a - \eta, a + \eta[\cap [a, +\infty[$,
- $g(x) > g(a) - \varepsilon = \frac{f(a)+g(a)}{2}$ car $x \in]a - \eta', a + \eta' [\cap [a, +\infty[$,
- $f(x) = g(x)$ car $x > a$.

Les deux premiers points, qui impliquent que $f(x) < g(x)$, sont donc contradictoires avec le troisième. Ainsi $f(a) \geq g(a)$. On peut appliquer le même raisonnement en supposant cette fois par l'absurde que $f(a) > g(a)$ et obtenir de nouveau une contradiction. D'où $f(a) \leq g(a)$, et finalement $f(a) = g(a)$.

Révisions et approfondissement.

Exercice 8 (Composition des limites)

Soient $f : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty$. Montrer, à partir des définitions, que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ f(x) = -\infty$.

Correction.

$f \circ g : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie. Par définition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ f(x) = -\infty$ si et seulement si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in]-\infty, B[, g \circ f(x) < M.$$

Soit $M \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim_{y \rightarrow -1} g(y) = -\infty$ (et $D_g = \mathbb{R}$),

$$\exists \eta > 0, \forall y \in]-1 - \eta, -1 + \eta[, g(y) < M.$$

Or puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ (et $D_f = \mathbb{R}_-$),

$$\exists B \leq 0, \forall x \in]-\infty, B[, |f(x) - (-1)| < \eta.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-\infty, B[, f(x) \in]-1 - \eta, -1 + \eta[$ d'où

$$\forall x \in]-\infty, B[, g(f(x)) < M.$$

Exercice 9 (Limites et monotonie)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Montrer que si f n'est pas majorée alors $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) = +\infty$. Illustrer le raisonnement.
2. Montrer que si f est majorée alors f admet une limite finie à gauche en b valant $\sup(\{f(x) / x \in]a, b[\})$. Illustrer le raisonnement.

Correction.

1. Soit $A > 1$. Comme f n'est pas majorée, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) > A$. Comme f est croissante, on a donc pour tout $x \in]x_0, b[, f(x) \geq f(x_0) > A$. Posons $\eta = b - x_0 > 0$. Alors on vient de montrer que pour tout $x \in]b - \eta, b[,$ on a $f(x) > A$. Cela signifie bien que $\lim_{\substack{x \rightarrow b, x < b}} f(x) = +\infty$.

2. Comme f est majorée, l'ensemble $F = \{f(x) / x \in]a, b[\} \subset \mathbb{R}$ est non vide et majorée donc il admet une borne supérieure d'après le théorème d'existence de la borne supérieure. On la note $S \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$, d'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $S - \varepsilon < \underbrace{f(x_0)}_{\in F}$.

Puisque f est croissante, on a donc pour tout $x > x_0$, $S - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq S < S + \varepsilon$. Posons $\eta = b - x_0 > 0$. Alors on vient de montrer que pour tout $x \in]b - \eta, b[,$ on a $S - \varepsilon < f(x) < S + \varepsilon$, i.e. $\lim_{x \rightarrow b, x < b} f(x) = S$.

Exercice 10

On souhaite démontrer dans cet exercice le théorème des gendarmes pour les fonctions dans un cas particulier grâce à deux méthodes différentes.

Soient f, g, h trois fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}_+$ telles que $f \leq g \leq h$ dans un voisinage de $+\infty$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$ grâce à la définition de la limite.
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$ en utilisant le théorème des gendarmes pour les suites.

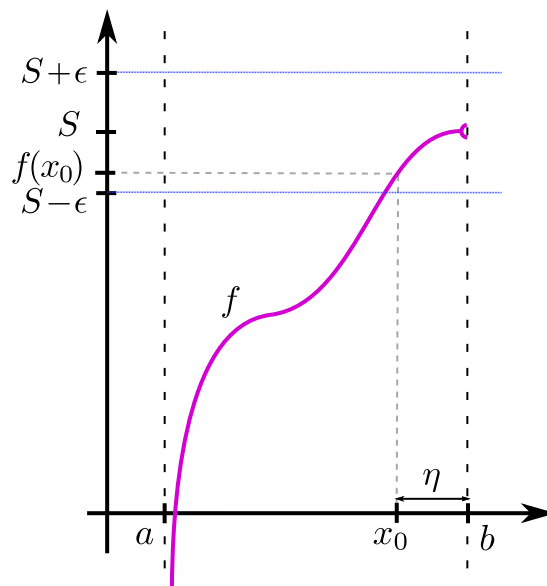


FIGURE 2. Illustration du raisonnement de la question 2. de l'exercice 9.

Correction.

1. Comme $f \leq g \leq h$ dans un voisinage de $+\infty$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in]B, +\infty[$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, il existe $B_f > 0$ tel que pour tout $x \in]B_f, +\infty[$, $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$.

De même comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$, il existe $B_h > 0$ tel que pour tout $x \in]B_h, +\infty[$, $\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$.

Posons $B_g = \max(B, B_f, B_h) > 0$. Alors pour tout $x > B_g$, on a

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon.$$

On a donc bien que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$.

2. Pour se ramener au cas des suites, on va utiliser le critère séquentiel de la limite.

Pour rappel, dans le contexte qui nous intéresse ici, le critère séquentiel de la limite nous dit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $D_g = \mathbb{R}_+$ tendant vers $+\infty$, on a $(g(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ .

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ qui tend vers $+\infty$. Comme $f \leq g \leq h$ dans un voisinage de $+\infty$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in]B, +\infty[$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n > B$. Ainsi pour tout $n \geq N$, $f(u_n) \leq g(u_n) \leq h(u_n)$. Or par le critère séquentiel de la limite (appliqué à f et g), les suites $f(u) = (f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $h(u)$ convergent vers ℓ . Donc par le théorème des gendarmes (pour les suites), $g(u)$ convergent également vers ℓ . Finalement par le critère séquentiel de la limite appliqué à g , on obtient bien que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$.

Exercice 11

Soit f, g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Montrer de deux manières différentes, une fois par un raisonnement direct et une autre en retournant aux définitions, que $\max(f, g)$ est une fonction continue.

Correction.

Première méthode. Comme $\max(f, g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ et puisque la somme, la différence et la valeur absolue de fonctions continues sont continues, on déduit que $\max(f, g)$ est continue.

Deuxième méthode. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrons $\max(f, g)$ est continue en x_0 en retournant à la définition. Si $f(x_0) - g(x_0) > 0$ alors par continuité de f, g en x_0 , il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $f(x) - g(x) > 0$ ainsi $f(x) > g(x)$ et $\max(f, g)(x) = f(x)$ (et $\max(f, g)(x_0) = f(x_0)$). La continuité est une propriété locale donc $\max(f, g)$ est continue en x_0 par continuité de f . Si $f(x_0) < g(x_0)$, alors le raisonnement est identique au précédent.

Il reste le cas $f(x_0) = g(x_0)$, i.e. $m = \max(f, g)(x_0) = f(x_0) = g(x_0)$. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en x_0 , il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, \quad m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon.$$

Par continuité de g en x_0 , il existe $\eta' > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \eta', x_0 + \eta'[, \quad m - \varepsilon < g(x) < m + \varepsilon.$$

Alors sur $V =]x_0 - \eta'', x_0 + \eta''[$ avec $\eta'' = \min(\eta, \eta')$,

$$m - \varepsilon < \max(f(x), g(x)) < m + \varepsilon.$$

i.e. $|\max(f, g)(x) - \max(f, g)(x_0)| < \varepsilon$. D'où de nouveau la continuité du $\max$ en x_0 . C'est vrai pour tout x_0 donc $\max(f, g)$ continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12

Déterminer si la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin(x)\cos(x)}{|x|}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Correction.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues. Pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x \times 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$. Pour tout $x < 0$, $f(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{-x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x \times 1}{-x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$. Les limites à gauche et à droite de f en 0 ne sont pas égales, donc f n'est pas pro-

longeable par continuité en 0. En effet supposons par l'absurde que f est prolongeable en une fonction $\tilde{f}$ continue en 0. Comme par définition pour tout $x \neq 0$, $\tilde{f}(x) = f(x)$, on a donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} \tilde{f}(x) = f(0^-) = -1$ et

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{f}(x) = f(0^+) = 1$. Mais comme $\tilde{f}$ est continue en 0, ses limites à gauche et à droite doivent être égales.

Contradiction, d'où le résultat annoncé.

Exercice 13 (Vers une définition ensembliste de la continuité)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes.

- (1) f est continue en x_0 .
- (2) pour tout $U \subset \mathbb{R}$ voisinage de $f(x_0)$, $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x_0 .

On rappelle que dans ce contexte, f^{-1} représente l'application image réciproque de f .

Correction.

Considérons pour fixer les idées une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ comme dans l'énoncé. Pour rappel, par définition de l'application image réciproque de f ³, on a pour tout $U \subset \mathbb{R}$

$$f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in U\}.$$

$f^{-1}(U)$ représente donc l'ensemble des antécédents par f des éléments de l'ensemble $U \subset \mathbb{R}$. $f^{-1}(U)$ est donc un sous ensemble de $\mathbb{R}$ (ou partie de $\mathbb{R}$). L'application ou fonction image réciproque de f est donc une fonction définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Il ne faut pas la confondre avec la fonction réciproque de f notée pourtant également f^{-1} . La fonction réciproque de f n'est définie que si f est bijective et elle est alors définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, bien que les notations soient les mêmes, le contexte d'utilisation de ces deux objets mathématiques distincts permet de les différencier. Si on écrit $f^{-1}(U)$ avec $U \subset \mathbb{R}$ (ce qui s'écrit également $U \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$), c'est que l'on considère ici la fonction image réciproque de f . Par contre si on écrit $f^{-1}(y)$ où $y \in \mathbb{R}$, c'est que l'on considère cette fois la fonction réciproque de f .

Pour terminer, voici comment ces deux objets sont reliés lorsque $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective :

$$\forall U \subset \mathbb{R}, \quad \underbrace{f^{-1}}_{\text{application image réciproque de } f}(U) = \left\{ \underbrace{f^{-1}}_{\text{fonction réciproque de } f}(y) / y \in U \right\}.$$

($\Rightarrow$) Soit U un voisinage de $f(x_0)$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[\subset U$. Comme f est continue en x_0 , on a par définition que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Ainsi il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, on a $f(x) \in]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ i.e. $x \in f^{-1}(]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[)$ (par définition de l'image réciproque).

On vient donc de montrer que tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, satisfait $x \in f^{-1}(]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[)$, i.e.

$$]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset f^{-1}(]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[).$$

Soit U_1, U_2 des sous ensembles de $\mathbb{R}$ tels que $U_1 \subset U_2$. Alors $f^{-1}(U_1) \subset f^{-1}(U_2)$. En effet, l'ensemble des antécédents par f des éléments de U_1 est bien inclus dans l'ensemble des antécédents par f des éléments de U_2 comme U_2 contient U_1 .

3. https://fr.wikipedia.org/wiki/Image_réciproque

Comme $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[\subset U$, on a donc $f^{-1}(]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[) \subset f^{-1}(U)$, d'où finalement

$$]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset f^{-1}(U).$$

Cette dernière inclusion correspond bien à dire que $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x_0 .

($\Leftarrow$) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ est un voisinage de $f(x_0)$, on a donc par hypothèse que $f^{-1}(]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[)$ est un voisinage de x_0 . Ainsi il existe $\eta > 0$ tel que $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset f^{-1}(]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[)$. Cela signifie que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, on a $f(x) \in]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ i.e. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. On vient bien de montrer que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ i.e. f continue en x_0 .

Licence 2^{ème} année, Mathématiques et Applications
ANALYSE 3

Feuille de TD n°7

Fonctions : continuité sur un intervalle et sur un segment, continuité uniforme.

Exercices complémentaires d'entraînement

Exercices de prise en main.

Exercice 1

Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que pour tout $x \in I$, $f(x)^2 = 1$. Montrer alors que f est constante.
2. Montrer que si $f(I)$ est fini alors f est constante.

Correction.

1. On a pour tout $x \in I$, $f(x) = \pm 1$. Comme par le TVI, $f(I)$ est un intervalle et $f(I) \subset \{-1, 1\}$. On déduit donc que $f \equiv 1$ ou $f \equiv -1$.
2. D'après le TVI, $f(I)$ est un intervalle, or tout intervalle non vide et fini est un singleton. Autrement dit, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(I) = \{c\}$, i.e. pour tout $x \in I$, $f(x) = c$.

Exercice 2

Soit $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\pi \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \sqrt{2}.$$

1. Montrer à l'aide d'un prolongement par continuité de f qu'il existe $x_0 \in]-1, 1[$ tel que $f(x_0) = \frac{1}{2}$.
2. Redémontrer le résultat sans utiliser de prolongement par continuité et en illustrant graphiquement votre raisonnement.

Correction.

1. Puisque f est continue et admet des limites finies en -1 et 1 , elle admet le prolongement par continuité suivant

$$\tilde{f} : x \in [-1, 1], x \mapsto \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si } x = 1 \\ f(x) & \text{si } x \in]-1, 1[\\ -\pi & \text{si } x = -1 \end{cases}.$$

Puisque $\tilde{f}$ est continue sur $[-1, 1]$ et que $\frac{1}{2} \in [\tilde{f}(-1), \tilde{f}(1)] = [-\pi, \sqrt{2}]$, il existe, d'après le TVI, $x_0 \in [-1, 1]$ tel que $\tilde{f}(x_0) = \frac{1}{2}$ et par élimination, $x_0 \notin \{-1, 1\}$ donc $\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \frac{1}{2}$.

2. Posons $\varepsilon = \pi$. Puisque $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\pi$, on a

$$\exists \eta > 0, \forall x \in]-1, -1 + \eta[\cap]-1, 1[, -2\pi < f(x) < 0.$$

Posons $\varepsilon' = \sqrt{2} - 1$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \sqrt{2}$, on a

$$\exists \eta' > 0, \forall x \in]1 - \eta', 1[\cap]-1, 1[, 1 < f(x) < 2\sqrt{2} - 1.$$

Posons alors $x_1 = \min(-1 + \frac{\eta}{2}, 0)$ et $x_2 = \max(0, 1 - \frac{\eta'}{2})$. Alors, $x_1 < x_2$, $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 1$, f est continue sur $[x_1, x_2]$ et $\frac{1}{2} \in [f(x_1), f(x_2)]$ donc d'après le TVI, il existe $x_0 \in [x_1, x_2] \subset]-1, 1[$ tel que $f(x_0) = \frac{1}{2}$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que $\min\{f(x) / x \in \mathbb{R}\}$ existe.

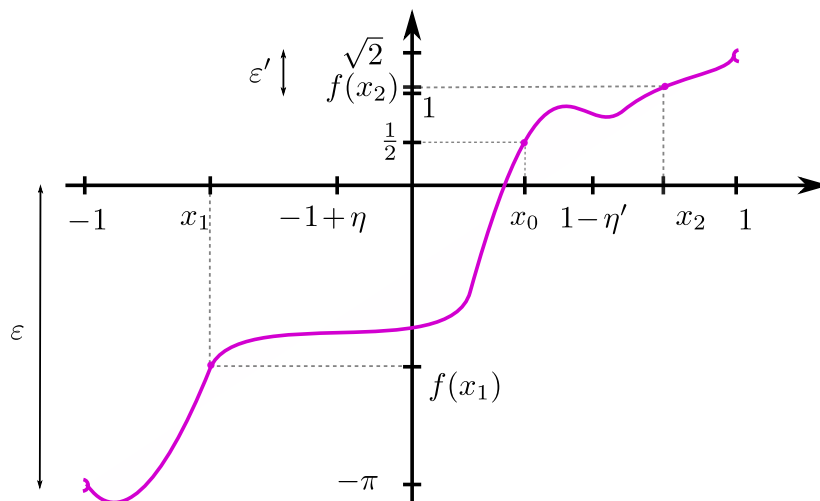


FIGURE 3. Illustration de la démonstration de l'exercice 2.

Correction.

Il s'agit de montrer que f atteint sa borne inférieure.

Par définition des limites, il existe $B_1 < 0$ et $B_2 > 0$ tels que

$$\forall x \in]-\infty, B_1[, f(x) > f(0) \quad \text{et} \quad \forall x \in]B_2, +\infty[, f(x) > f(0).$$

Puisque f est continue sur $[B_1, B_2]$, il existe, d'après le cours, $m \in \mathbb{R}$ et $c \in [B_1, B_2]$ tels que $f(c) = m$ et pour tout $x \in [B_1, B_2]$, $f(x) \geq m$. En particulier, $f(0) \geq m$ donc on a aussi pour tout $x \in]-\infty, B_1[\cup]B_2, +\infty[$, $f(x) > f(0) \geq m$. Finalement m est un minorant de $\text{Im } f$ et $m \in \text{Im } f$ donc $m = \min(\text{Im } f)$.

Révisions et approfondissement.

Exercice 4

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction K -lipschitzienne, $K \geq 0$. On dira que σ est une subdivision de $[a, b]$ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n \in [a, b]$ tels que $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ et

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b.$$

On note alors

$$V(f, \sigma) := \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$

1. Montrer que l'ensemble $V_f := \{V(f, \sigma) / \sigma \text{ subdivision de } [a, b]\}$ admet une borne supérieure. On la note $V(f)$ et on dit que f est à variation bornée.
2. On considère $f : x \in [a, b] \mapsto x^2$. Montrer que f est K -lipschitzienne, pour un certain $K \geq 0$. Déterminer $V(f)$.

Correction.

1. L'ensemble V_f est non vide, car par exemple contient la quantité $|f(b) - f(a)|$ correspondant à la subdivision $\sigma = (a, b)$. Comme f est K -lipschitzienne sur $[a, b]$, pour tout $x, x' \in [a, b]$, on a $|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|$. Soit $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, une subdivision de $[a, b]$. Alors $V(f, \sigma) \leq \sum_{i=0}^{n-1} K|a_{i+1} - a_i| = K \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) = K(b - a)$. D'où V_f est majorée (par $K(b - a)$). Par le théorème d'existence de la borne supérieure, V_f admet une borne supérieure.

2. On a pour tout $x, x' \in [a, b]$, $|f(x) - f(x')| = |x^2 - x'^2| = |x + x'||x - x'| \leq (|x| + |x'|)|x - x'| \leq 2 \max(|a|, |b|)|x - x'|$. D'où f est $2 \max(|a|, |b|)$ -lipschitzienne. Ainsi on sait que f est à variation bornée.

Soit $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, une subdivision de $[a, b]$. Alors $V(f, \sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} |a_{i+1}^2 - a_i^2| = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}^2 - a_i^2) = a_n^2 - a_0^2 = b^2 - a^2$. D'où $V_f = \{b^2 - a^2\}$ et donc $V(f) = b^2 - a^2$.

Exercice 5

Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ et satisfaisant au voisinage de 0, $f(x) = \sin(x^3) \ln(\tan(x^2)) + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0, 1[$ tel que $f(x_0) = 1$.

Correction.

On reconnaît une problématique du théorème des valeurs intermédiaires. Pour appliquer ce théorème, nous allons prolonger f par continuité sur $[0, 1]$.

On a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x^3) \ln(\tan(x))$. Or, $\tan(x^2) = x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$, donc $\ln(\tan(x^2)) = \ln\left(x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) = \ln(x^2) + \ln\left(1 + o_{x \rightarrow 0}(1)\right) = 2\ln(x) + o_{x \rightarrow 0}(1)$ donc $\sin(x^3) \ln(\tan(x)) = 2(x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3))(\ln(x) + o_{x \rightarrow 0}(1)) = 2x^3 \ln x + o_{x \rightarrow 0}(x^3 \ln x)$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Puisque f admet une limite finie en 0 et en 1, elle se prolonge par continuité en la fonction

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ f(x) & \text{si } x \in]0, 1[\\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à la fonction continue $\tilde{f}$ sur le segment $[0, 1]$, il existe donc $x_0 \in [0, 1]$ tel que $\tilde{f}(x_0) = 1$ (car $1 \in [\tilde{f}(0), \tilde{f}(1)]$). Puisque $\tilde{f}(0) = 0$ et $\tilde{f}(1) = 2$, on a $x_0 \in]0, 1[$ d'où $1 = \tilde{f}(x_0) = f(x_0)$.