

Licence 2^{ème} année, Mathématiques et Applications
ANALYSE 3

Feuille de TD n°1

Langage mathématique, propriétés des réels.

Exercices complémentaires d'entraînement

Exercices de prise en main.

Exercice 1

Soient A et B deux sous ensembles bornés de $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
Donner la contraposée des assertions suivantes :

1. Si A admet un minimum, alors $\inf A \in A$.
2. Si A est inclus dans B , alors $\sup A \leq \sup B$.
3. Si A est l'image de B par f , alors f est bornée sur A .
4. Si A est non vide et majoré, A admet une borne supérieure.
5. Si f est monotone, alors f est croissante ou décroissante.

Exercice 2

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, xy = 1$.
2. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, xy = 1$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 0 \implies \exists y \in \mathbb{R}, x < y \wedge y > 1)$.
4. $\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}, x < y \implies y > 0$.

Exercice 3

Soient A et B deux sous ensembles minorés de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \cup B$ est minoré.

Exercice 4

Soient A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$ avec B majoré. Montrer que $A \cap B$ est majoré.

Exercice 5

Soient A, B et C trois sous ensembles de $\mathbb{R}$ tels que $A \subset B$ et $B \subset C$. Montrer que $A \subset C$.

Exercice 6

Soit A un sous-ensemble infini de $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il contient une infinité d'entiers pairs ou une infinité d'entiers impairs.

Exercice 7

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\min(x, y) \leq \frac{x+y}{2} \leq \max(x, y)$.

Exercice 8 Caractérisation d'un ensemble borné.

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que A est borné si et seulement si

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, \quad m \leq a \leq M.$$

Exercice 9

Donner, dans chacun des cas suivants et sans justification, des exemples de sous ensembles A et B de $\mathbb{R}$ distincts tels que

1. $\inf A = \inf B$ et $\sup A = \sup B$
2. $A \subsetneq B, B \subsetneq A, \inf A = \inf B$ et $\sup A = \sup B$
3. $\min A = \min B$ et $\max A = \max B$
4. $\sup(A \cap B) \geq \sup(A \cup B)$
5. $A \subset B, \sup A = \inf B$
- 6.* $A \cap B = \emptyset$, ni A , ni B n'est minoré.

Révisions et approfondissement.

Exercice 10

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+k}$.
2. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n.$$

Exercice 11

Soient a et b deux réels distincts. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x - a| = |x - b|$.

Exercice 12

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer qu'il existe $a', b' \in \mathbb{R}$ tels que $a' < b'$ et $[a', b'] \subset]a, b[$.

Exercice 13

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$[a + \varepsilon, a + 2\varepsilon] \cap [b, +\infty[= \emptyset.$$

Exercice 14

Soient $a, b, x \in \mathbb{R}$ tels que $x < a + b$. Montrer qu'il existe $x_a, x_b \in \mathbb{R}$ tels que $x_a < a$, $x_b < b$ et $x = x_a + x_b$.

Exercice 15

Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1. $A = \{\min(|x|, 3) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
2. $A = \bigcup_{k \in \{0,1,2\}} \left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2} \right]$.
3. $A = \{\cos(2x) \mid x \in \mathbb{R}_-\}$.

Exercice 16

On dit qu'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ satisfait la propriété (P) si l'assertion suivante est vraie

$$(P) \quad \forall z \in A, \exists x, y \in A, x < z < y.$$

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Déterminer dans chacun des cas suivants si l'ensemble considéré satisfait la propriété (P).

$$\text{a) } A_1 = \mathbb{N}. \quad \text{b) } A_2 =]a, b]. \quad \text{c) } A_3 =]a, b] \cup]b + 1, b + 2[.$$

2. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble fini non vide. Déterminer si A satisfait (P).
3. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble borné non vide tel que $\inf(A) \notin A$ et $\sup(A) \notin A$. Déterminer si A satisfait (P).
4. Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles satisfaisant (P). Déterminer si $A \cup B$ satisfait nécessairement (P).
5. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble satisfaisant (P). Montrer que A n'est pas nécessairement un intervalle. Justifier que votre contre-exemple n'est pas un intervalle.

Exercice 17 (Cours : Lien entre minimum et borne inférieure)

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que A admet un minimum si et seulement si A admet une borne inférieure et $\inf(A) \in A$, auquel cas $\min(A) = \inf(A)$.

Exercice 18

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $A =]a, +\infty[$ et on note $\mathcal{M}(A)$ l'ensemble des minorants de A . Donner la définition ensembliste de $\mathcal{M}(]a, +\infty[)$ puis déterminer cet ensemble.

Exercice 19

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall a \in A, \forall b \in B, \quad a \leq b.$$

Peut-on déduire les assertions suivantes :

1. $A \cap B = \emptyset$.
2. $B \neq \mathbb{R}$.
3. $\sup(A) \in B$.
4. $\forall b \in B, \sup(A) \leq b$.
5. $\sup(A) \leq \inf(B)$.
6. $\inf(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 20

Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1. $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 5\}$
2. $A = \{\det(M^2) / M \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})\}$.

Exercice 21

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$.

On suppose que $a < b$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < g(x)$.

1. On note $y_\lambda = \lambda a + (1 - \lambda)b$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $y_0, y_1, y_{\frac{1}{2}}$ et $y_{\frac{1}{3}}$.
Montrer que $\{\lambda a + (1 - \lambda)b / \lambda \in [0, 1]\} = [a, b]$.
2. Montrer qu'il existe une fonction continue h définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < h(x) < g(x)$.
3. En déduire un ensemble infini de fonctions vérifiant les mêmes propriétés que h .
4. ★★ Donner un exemple de telles fonctions f et g pour lesquelles il n'existe aucun $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) + \varepsilon < g(x)$.

Exercice 22

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}_+$. Soit $A \cdot B = \{x \in \mathbb{R} / \exists a \in A, \exists b \in B, x = ab\}$.
Montrer que $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \sup(B)$.

Licence 2^{ème} année, Mathématiques et Applications
ANALYSE 3

Feuille de TD n°2

Suites réelles et complexes : convergence, limites et inégalités.

Exercices complémentaires d'entraînement

Exercices de prise en main.

Exercice 1

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

1. On suppose que u est décroissante à partir du rang 5 et v est décroissante à partir du rang 9. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $u + v$ est décroissante.
2. On suppose que u est minorée à partir du rang 3 et v est positive à partir du rang 2. Montrer que $u + v$ est minorée.

Exercice 2

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante. Montrer que $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ existe et donner sa valeur.

Exercice 3

Soient $\varepsilon > 0$ et $M \in \mathbb{R}$. Déterminer dans chacun des cas suivants le plus petit rang à partir duquel la propriété énoncée est vraie ou le plus grand rang jusqu'auquel la propriété énoncée est vraie.

- | | |
|---|---|
| 1. $ u_n < \varepsilon$, avec $u_n = \frac{3}{n^2+5}$ | 3. $u_n > 1$, avec $u_n = \tan(\frac{n\pi}{2n+9})$ |
| 2. $u_n \geq M$, avec $u_n = 4 - n^2$ | 4. $u_n < M$, avec $u_n = \ln(n)$ |

Exercice 4

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}) \iff (\forall n, p \in \mathbb{N}, n < p \Rightarrow u_n < u_p).$$

Exercice 5

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Montrer que si u est croissante et v minorée, alors $u + v$ est minorée.
2. On suppose que u est croissante et f décroissante. Montrer que $v = f(u)$ est monotone.
3. On suppose que u est majorée à partir d'un certain rang. Montrer que u est majorée.
4. On suppose que u est bornée à partir d'un certain rang. Montrer que u est bornée.
5. Montrer que si u est minorée, alors $v = e^{-u}$ est majorée.
6. Montrer que si u est croissante et positive et v négative et décroissante, alors uv est décroissante.

Exercice 6

Soient $\ell \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrer que la suite z converge vers ℓ si et seulement si la suite $\bar{z}$ converge vers $\bar{\ell}$.

Exercice 7

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante convergeant vers 0. Montrer que u est négative.

Exercice 8

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante. On suppose que $\max_{n \in \mathbb{N}} u_n$ existe. Montrer que u est stationnaire.

Exercice 9

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite de limite $\ell \in \mathbb{K}$. *Consigne : pour cet exercice, on n'utilisera aucune propriété sur la notion de limite autre que la définition.*

1. Montrer que la suite $v = u - \ell$ tend vers 0.
2. Montrer que la suite $v = \frac{u}{3}$ tend vers $\frac{\ell}{3}$.
3. Montrer que la suite $v = u^2$ tend vers ℓ^2 .

Révisions et approfondissement.**Exercice 10**

Soient $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $z_n = x_n + iy_n$. Montrer en utilisant uniquement la définition de limite que si z converge vers 0 alors x et y convergent vers 0.

Exercice 11 (Sur $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ - Partie 1)

1. Soit $\ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon [\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
2. En déduire que toute suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est stationnaire.

Exercice 12 (Sur $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ - Partie 2)

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Montrer que u est stationnaire si et seulement si elle vérifie à partir d'un certain rang $u_{n+1} = u_n$.
2. On suppose maintenant que u est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et qu'elle est convergente. En majorant $|u_{n+1} - u_n|$ à partir d'un certain rang, montrer que u est stationnaire.

Exercice 13 (Inversion de quantificateurs)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente vers 0. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists p > n, |u_p| < \varepsilon.$$

Que signifie cette propriété ? Donner sa négation.

Exercice 14

Soit u une suite réelle. On souhaite montrer que u n'est pas monotone si et seulement si

$$(1) \quad \exists n, p, q \in \mathbb{N}, n < p < q \text{ et } (u_p > \max(u_n, u_q) \text{ ou } u_p < \min(u_n, u_q))$$

1. Montrer le sens indirect.
2. ★ Montrer le sens direct.

Exercice 15

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente vers 0.

1. Montrer que uv tend vers 0 en utilisant le théorème des gendarmes.
2. Montrer que uv tend vers 0 sans utiliser le théorème des gendarmes.

Exercice 16 (Série harmonique)

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que la suite u est soit convergente, soit tend vers $+\infty$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_{2n} \geq \frac{1}{2} + u_n$.
3. En déduire que u tend vers $+\infty$.

Exercice 17 (Cours : complément du théorème de la limite monotone)

Soit u une suite réelle. Si u est décroissante et minorée, alors u est convergente vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell \leq u_n$.

1. Montrer ce résultat en utilisant le théorème de la limite monotone pour les suites croissantes.
2. Montrer ce résultat sans utiliser le théorème de la limite monotone. *Indication : on pourra poser $\ell = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$.*

Licence 2^{ème} année, Mathématiques et Applications
ANALYSE 3

Feuille de TD n°3

Suites réelles et complexes : comportement asymptotique.

Exercices complémentaires d'entraînement

Exercice 1

Soient $a, b, q, r \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $0 < q < r$. Montrer que

$$n^a = o_{n \rightarrow +\infty}(n^b) \quad \text{et} \quad q^n = o_{n \rightarrow +\infty}(r^n).$$

Exercice 2

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n = (-1)^n + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$. Montrer que u est bornée.

Exercice 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. Montrer que

$$\frac{a}{b + o_{n \rightarrow +\infty}(1)} = \frac{a}{b} + o_{n \rightarrow +\infty}(1).$$

Exercice 4

Donner un équivalent simple des quantités suivantes

1. $u_n = (n-7) \ln(n^2 + 2)$

3. $u_n = -7^n + 5n^{-3n} - n^3 + (2n)!$

2. $u_n = \frac{n}{1 - \frac{1}{n}}$

4. $u_n = 2n^4 - 3n^2 + (\ln(n))^9 - n^3(\ln(n))^2 + 0.9^n$

Exercice 5

Donner des équivalents simples des quantités suivantes.

1. $u_n = \frac{n-1}{3} \ln(n)^5 + (n + \sqrt{n+1} - 7)^2$

4. $u_n = (n-1)^n$

2. $u_n = \cos\left(\frac{1}{n^n}\right) + \frac{1}{(n+3)^2}$

5. $u_n = \frac{(n-\pi)^n}{n^n + 10^n - (3n)!}$

3. $u_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$

6. $u_n = \frac{8 - 3n + \frac{1}{3^n} + \sqrt{n} \ln(n)^2}{-1 + \frac{n}{\ln(\ln(n^{2n}))}}$

Exercice 6

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que

$$u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \quad \Longleftrightarrow \quad au_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n).$$

Exercice 7

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

1. Montrer que $(-1)^n u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

2. Montrer que $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(|v_n|)$.

Exercice 8

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites non nulles et équivalentes. On modifie la suite v en fixant à 0 un nombre fini de ses termes et on note w la suite obtenue. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$.

Licence 2^{ème} année, Mathématiques et Applications
ANALYSE 3

Feuille de TD n°4

Suites réelles et complexes : suites extraites, suites de Cauchy. Rappels et compléments sur les séries.

Exercices complémentaires d'entraînement

Exercices de prise en main.

Exercice 1

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \left(-\frac{n+2}{n}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donner deux valeurs d'adhérence de u .

Exercice 2

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_n = i \arctan^2(-\ln(n^5 + 7))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que u possède au moins une valeur d'adhérence.

Exercice 3

Soit φ une extractrice. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

Exercice 4

1. Montrer que u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$, diverge.
2. Montrer que u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{n \sin(3n + 5)}{4n + 1}$, admet une sous-suite convergente.

Exercice 5

On rappelle que la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet l'intervalle $[-1, 1]$ comme ensemble de valeurs d'adhérence. Soit u la suite définie par $u_n = |\cos(n)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de u .

Exercice 6

Soit $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n^3 = 1$.

1. Montrer que z admet une valeur d'adhérence.
2. On note $V \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de z . Déterminer toutes les valeurs pouvant appartenir à V .
3. On suppose que pour tout $\ell \in V$, $\Im(\ell) > 0$. Montrer que z converge.

Révisions et approfondissement.

Exercice 7

Soient $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ deux suites telles que v est une sous-suite de u . On suppose que v admet k valeurs d'adhérence avec $k \in \mathbb{N}$. Montrer que u admet au moins k valeurs d'adhérence.

Exercice 8

Soit u une suite réelle.

1. On suppose que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ' . Montrer que ℓ et ℓ' sont les deux seules valeurs d'adhérence de u .
2. En déduire les valeurs d'adhérence de la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n(1 + e^{-n})$.

Exercice 9

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer qu'elle admet une sous-suite de termes soit tous positifs, soit tous négatifs.

Exercice 10

Soient $c \in \mathbb{R}^*$ et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = c$.

1. Montrer à l'aide des résultats du cours que u n'est pas de Cauchy.
2. Montrer en revenant aux définitions que u n'est pas de Cauchy.

Exercice 11

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On suppose que les sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers des scalaires a , b et c .

1. Montrer que $a = b = c$.
2. En déduire que u converge.

Licence 2^{ème} année, Mathématiques et Applications
ANALYSE 3

Feuille de TD n°5

Fonctions : limites et continuité.

Exercices complémentaires d'entraînement

Exercices de prise en main.

Exercice 1 (Un peu de topologie)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + 2\varepsilon[$ est un voisinage de x_0 .
2. Soit $V \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, satisfaisant $x_0 \in]a, b[$ et $]a, b[\subset V$. Montrer que V est un voisinage de x_0 .
3. Soit $V \subset \mathbb{R}$ un voisinage de x_0 . Soit $V' \subset \mathbb{R}$ tel que $V \subset V'$. Montrer que V' est un voisinage de x_0 .

Exercice 2

Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{x}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (-1)^{E(x)}$.

1. Tracer l'allure du graphe de f et déterminer l'ensemble des points $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que f est localement bornée en x_0 .
2. Soit $g :]-1, 0[\cup]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)$. Déterminer le prolongement par continuité maximal de g .

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ si $x < 0$. Tracer l'allure du graphe de f et déterminer l'ensemble des points $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que f est localement bornée en x_0 .

Exercice 5

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement bornées en 1. Montrer que $f + g$ est localement bornée en 1.

Exercice 6

Soient $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que f et g sont continues en $x_0 \in D_f \cap D_g$. Montrer que $f + g$ est continue en x_0 ,

1. en utilisant la définition de la continuité,
2. en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité.

Exercice 7

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que

$$\forall x > a, \quad f(x) = g(x).$$

Montrer par différentes méthodes que $f(a) = g(a)$.

Révisions et approfondissement.

Exercice 8 (Composition des limites)

Soient $f : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty$. Montrer, à partir des définitions, que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ f(x) = -\infty$.

Exercice 9 (Limites et monotonie)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Montrer que si f n'est pas majorée alors $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) = +\infty$. Illustrer le raisonnement.
2. Montrer que si f est majorée alors f admet une limite finie à gauche en b valant $\sup(\{f(x) / x \in]a, b[\})$. Illustrer le raisonnement.

Exercice 10

On souhaite démontrer dans cet exercice le théorème des gendarmes pour les fonctions dans un cas particulier grâce à deux méthodes différentes.

Soient f, g, h trois fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}_+$ telles que $f \leq g \leq h$ dans un voisinage de $+\infty$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$ grâce à la définition de la limite.
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$ en utilisant le théorème des gendarmes pour les suites.

Exercice 11

Soit f, g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Montrer de deux manières différentes, une fois par un raisonnement direct et une autre en retournant aux définitions, que $\max(f, g)$ est une fonction continue.

Exercice 12

Déterminer si la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin(x) \cos(x)}{|x|}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 (Vers une définition ensembliste de la continuité)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes.

- (1) f est continue en x_0 .
- (2) pour tout $U \subset \mathbb{R}$ voisinage de $f(x_0)$, $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x_0 .

On rappelle que dans ce contexte, f^{-1} représente l'application image réciproque de f .

Licence 2^{ème} année, Mathématiques et Applications
ANALYSE 3

Feuille de TD n°7

Fonctions : continuité sur un intervalle et sur un segment, continuité uniforme.

Exercices complémentaires d'entraînement

Exercices de prise en main.

Exercice 1

Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que pour tout $x \in I$, $f(x)^2 = 1$. Montrer alors que f est constante.
2. Montrer que si $f(I)$ est fini alors f est constante.

Exercice 2

Soit $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\pi \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \sqrt{2}.$$

1. Montrer à l'aide d'un prolongement par continuité de f qu'il existe $x_0 \in]-1, 1[$ tel que $f(x_0) = \frac{1}{2}$.
2. Redémontrer le résultat sans utiliser de prolongement par continuité et en illustrant graphiquement votre raisonnement.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que $\min\{f(x) / x \in \mathbb{R}\}$ existe.

Révisions et approfondissement.

Exercice 4

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction K -lipschitzienne, $K \geq 0$. On dira que σ est une subdivision de $[a, b]$ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n \in [a, b]$ tels que $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ et

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b.$$

On note alors

$$V(f, \sigma) := \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$

1. Montrer que l'ensemble $V_f := \{V(f, \sigma) / \sigma \text{ subdivision de } [a, b]\}$ admet une borne supérieure. On la note $V(f)$ et on dit que f est à variation bornée.
2. On considère $f : x \in [a, b] \mapsto x^2$. Montrer que f est K -lipschitzienne, pour un certain $K \geq 0$. Déterminer $V(f)$.

Exercice 5

Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ et satisfaisant au voisinage de 0, $f(x) = \sin(x^3) \ln(\tan(x^2)) + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0, 1[$ tel que $f(x_0) = 1$.